10–11 классы

Задача 1. (5 баллов)

1.1. Найти 2020 цифру последовательности 123456789101112…… . Принцип формирования последовательности — выписываются подряд все натуральный числа.

Решение.

Аналитический вариант решения задачи. Записываем длинное число 123456789101112…… . Произведем анализ его структуры. Число сначала содержит 9 однозначных чисел, 90 двузначных чисел, далее идут трехзначные числа. На однозначные и двузначные числа потребовалось 9*1+90*2=189 знаков. Если из 2020 вычесть 189, получим 1831. Разделив 1831 на три, получим 810 и единицу в остатке. Значит, на 2020 позиции длинного числа находится первая цифра 811 трехзначного числа. Принимая во внимание, что первое трехзначное число есть 100, первая цифра в 811 трехзначном числе есть первая цифра в числе 710, то есть, это цифра 7.

Решение задачи с помощью программы. При составлении программы используем функцию подсчета знаков в числе. Перебираем числа в порядке возрастания, в каждом числе определяем количество знаков и суммируем это количество знаков. Данный процесс продолжаем до тех пор, пока эта сумма не превзойдет искомую позицию в длинном числе. Код программы и результаты работы представлены далее.

```
#include"stdafx.h"
#include"iostream"
usingnamespace std;

int f (unsignedint x)
{
	int n=1;
	while ((x/=10) > 0) n++;
	return n;
}

int main()
{
	unsignedint x=0;
	int count=0, s=0;
	while(s<=2020)
	{
		x++; count++; s+=f(x);
		cout<<count<<":\t"<<x<<"\t"<<s<<endl;
	}
	system("pause");
	return 0;
}
```

```
Результат работы программы:
        1:      1       1
        2:      2       2
        3:      3       3
        4:      4       4
        5:      5       5
        6:      6       6
        7:      7       7
        8:      8       8
        9:      9       9
```

```
10:     10      11
11:     11      13
12:     12      15
13:     13      17
14:     14      19
15:     15      21
для экономии места, фрагмент с 16 до 699 шага пропущен
700:    700     1992
701:    701     1995
702:    702     1998
703:    703     2001
704:    704     2004
705:    705     2007
706:    706     2010
707:    707     2013
708:    708     2016
709:    709     2019
710:    710     2022
```
Ответ: На искомой позиции находится цифра 7.

1.2. Найти 2020 цифру последовательности 149162536496481…… . Принцип формирования последовательности — выписываются подряд квадраты всех натуральных чисел.
Решение. Аналогично решению задачи 1.1 с учетом условий задачи и соответствующей модификации программного кода.
Ответ: (2-я степень чисел.) На 2020 позиции находится цифра 9.

1.3. Найти 2020 цифру последовательности 182764125216…… . Принцип формирования последовательности — выписываются подряд кубы всех натуральных чисел.
Решение. Аналогично решению задачи 1.1 с учетом условий задачи и соответствующей модификации программного кода.
Ответ: (3-я степень чисел.) На 2020 позиции находится цифра 8.

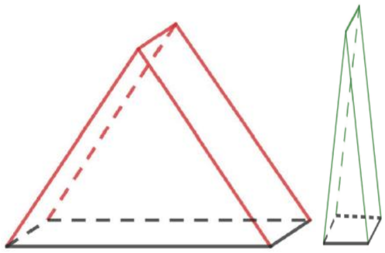
1.4. Найти 2020 цифру последовательности 11681…… . Принцип формирования последовательности — выписываются подряд четвертые степени всех натуральных чисел.
Решение. Аналогично решению задачи 1.1 с учетом условий задачи и соответствующей модификации программного кода.
Ответ: (4-ая степень чисел.) На 2020 позиции находится цифра 0.

1.5. Найти 577 цифру последовательности 1123581321…… . Принцип формирования последовательности — выписываются подряд все числа Фибоначчи. Первое и второе число Фибоначчи равно единице. Каждое последующее число — сумма двух предыдущих чисел.
Решение. Аналогично решению задачи 1.1 с учетом условий задачи и соответствующей модификации программного кода.
Ответ: (числа Фибонначи.) На 577 позиции находится цифра 1.

Задача 2. (5 баллов)

2.1. Иван Иванович и Иван Петрович имеют одинаковые дачные участки. Они обносят свои участки заборами, состоящими из секций с одинаковыми высотой и глубиной, но ширина секции забора Ивана Петровича в пять раз меньше (см.

рисунок). Ивана Иванович красит всю поверхность забора (кроме основания секций) в красный цвет, а Иван Петрович — в зеленый. Найдите отношение площадей поверхностей, покрашенных в красный и зеленый цвета, если известно, что Иван Иванович поставил целое количество секций забора. Верно ли, что значение этого отношения близко к $1/5$?



Решение. Введем следующие обозначения для размеров меньшей секции («зеленая» секция забора Ивана Петровича): h — высота, b — глубина, a — ширина секции. При этом размеры большей секции («красная» секция забора Ивана Ивановича) будут h, b и $5a$. Площадь окрашенной поверхности каждой секции складывается из площадей передней и задней стенки секции, представляющих собой одинаковые равнобедренные треугольники, а также из двух боковых поверхностей, представляющих собой одинаковые прямоугольники.

Например, площадь окрашенной поверхности «зеленой» секции забора

$$S_з = 2 \cdot (a \cdot h/2) + 2 \cdot \left(b \cdot \sqrt{h^2 + (a/2)^2}\right),$$

а площадь «красной» секции

$$S_к = 2 \cdot (5a \cdot h/2) + 2\left(b \cdot \sqrt{h^2 + (5a/2)^2}\right).$$

Пусть Иван Иванович поставил N секций забора — по условию это целое (и положительное) число. Тогда Иван Петрович поставил $5N$ секций забора. Запишем искомое отношение площадей окрашенных поверхностей, которое обозначим через A:

$$A = \frac{N \cdot S_к}{5N \cdot S_з} = \frac{5ah + 2b\sqrt{h^2 + (5a/2)^2}}{5ah + 2b\sqrt{25h^2 + (5a/2)^2}}. \qquad (*)$$

Обсудим найденный общий ответ. Слагаемое $5ah$, стоящее и в числителе, и в знаменателе, показывает, что общие площади окрашенной передней и задней поверхностей для заборов Ивана Ивановича и Ивана Петровича одинаковы. При этом площади окрашенных боковых поверхностей их заборов уже не являются одинаковыми, поскольку слагаемые с корнем в числителе и знаменателе различны. Ясно, что в общем случае $A \neq 1/5$, хотя Иван Иванович и установил в 5 раз меньше секций, чем Иван Петрович. Однако, при любых значениях h, b и a зеленой краски для покраски заборов придется потратить больше, чем красной, так как A всегда меньше 1.

Покажем, что при определенных условиях значение A может оказаться близко к $1/5$. Преобразуем в числителе и в знаменателе выражение под корнем:

$$A = \frac{5ah + 2bh\sqrt{1 + (5a/2h)^2}}{5ah + 2bh\sqrt{25 + (5a/2h)^2}} = \frac{5a + 2b\sqrt{1 + (5a/2h)^2}}{5a + 2b\sqrt{25 + (5a/2h)^2}}.$$

Предположим, что высота секции h много больше, чем $5a/2$. Тогда можно считать, что слагаемое $(5a/2h)^2$ мало, так что им можно пренебречь. Тогда

$$A \approx \frac{5a + 2b}{5a + 2b \cdot 5} = \frac{a + 2b/5}{a + 2b} = \frac{a + 2b/5 + 8b/5 - 8b/5}{a + 2b} = 1 - \frac{8b/5}{a + 2b}.$$

Если дополнительно можно считать, что ширина секции много меньше, чем ее глубина, и пренебречь величиной a в знаменателе во втором слагаемом, то получим

$$A \approx 1 - \frac{8b/5}{2b} \approx 0{,}2 = \frac{1}{5}.$$

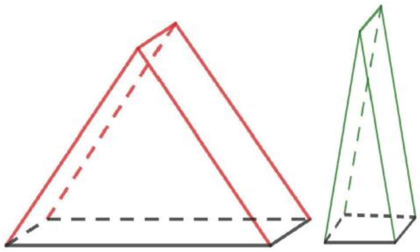
В таблице представлены значения A, вычисленные по точной формуле (*) при $h = 200$, $b = 10$ и для a в диапазоне от 250 до 0,5; все величины считаем заданными в сантиметрах:

a	A	a	A
250	0,9407	30	0,6800
200	0,9273	20	0,6000
150	0,9059	10	0,4667
100	0,8667	5	0,3600
80	0,8400	3	0,3043
50	0,7714	1	0,2381
40	0,7333	0,5	0,2195

Видим, что здесь A становится близко к $1/5$ при столь малых значениях a, которые ширина секции реального забора иметь не может.

Ответ: $\dfrac{5ah+2b\sqrt{h^2+(5a/2)^2}}{5ah+2b\sqrt{25h^2+(5a/2)^2}}$.

2.2. Иван Иванович и Иван Петрович имеют одинаковые дачные участки. Они обносят свои участки заборами, состоящими из секций с одинаковыми высотой и глубиной, но ширина секции забора Ивана Петровича в четыре раза меньше (см. рисунок). Ивана Иванович красит всю поверхность забора (кроме основания секций) в красный цвет, а Иван Петрович — в зеленый. Найдите отношение площадей поверхностей, покрашенных в красный и зеленый цвет, если известно, что Иван Иванович поставил целое количество секций забора.

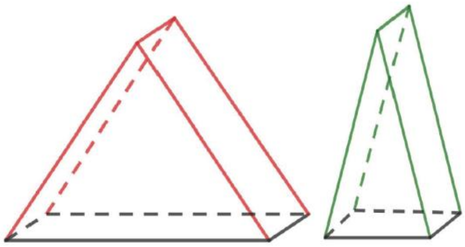


Решение. Аналогично решению задачи 2.1 с учетом следующих замечаний:
Ширина красной секции = $4a$.
Площадь окрашенной поверхности для одной «красной» секции:
В задаче 3_3: $S_к = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot 4a \cdot h + 2 \cdot b \cdot \sqrt{h^2 + 4a^2}$.
Иван Петрович ставит $4N$секций.

$$A = \frac{N \cdot S_к}{4N \cdot S_з} = \frac{4ah + 2b\sqrt{h^2 + 4a^2}}{4ah + 2b\sqrt{16h^2 + 4a^2}}$$

Ответ: $\frac{4ah+2b\sqrt{h^2+4a^2}}{4ah+2b\sqrt{16h^2+4a^2}}$.

2.3. Иван Иванович и Иван Петрович имеют одинаковые дачные участки. Они обносят свои участки заборами, состоящими из секций с одинаковыми высотой и глубиной, но ширина секции забора Ивана Петровича втрое меньше (см. рисунок). Ивана Иванович красит всю поверхность забора (кроме основания секций) в красный цвет, а Иван Петрович — в зеленый. Найдите отношение площадей поверхностей, покрашенных в красный и зеленый цвет, если известно, что Иван Иванович поставил целое количество секций забора.

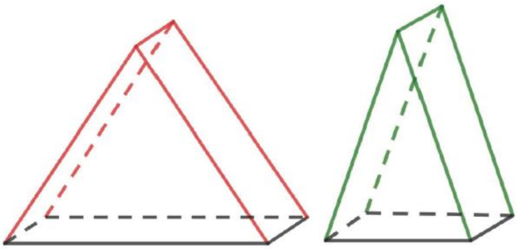


2.3. Решение. Аналогично решению задачи 2.1 с учетом следующих замечаний:
Ширина красной секции = $3a$.
Площадь окрашенной поверхности для одной «красной» секции:
В задаче 3_2: $S_к = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot 3a \cdot h + 2 \cdot b \cdot \sqrt{h^2 + \left(\frac{3a}{2}\right)^2}$.
Иван Петрович ставит $3N$секций.

$$A = \frac{N \cdot S_к}{3N \cdot S_з} = \frac{3ah + 2b\sqrt{h^2 + \left(\frac{3a}{2}\right)^2}}{3ah + 2b\sqrt{9h^2 + \left(\frac{3a}{2}\right)^2}}$$

Ответ: $\frac{3ah+2b\sqrt{h^2+\left(\frac{3a}{2}\right)^2}}{3ah+2b\sqrt{9h^2+\left(\frac{3a}{2}\right)^2}}$.

2.4. Иван Иванович и Иван Петрович имеют одинаковые дачные участки. Они обносят свои участки заборами, состоящими из секций с одинаковыми высотой и глубиной, но ширина секции забора Ивана Петровича вдвое меньше (см. рисунок). Ивана Иванович красит всю поверхность забора (кроме основания секций) в красный цвет, а Иван Петрович — в зеленый. Найдите отношение площадей поверхностей, покрашенных в красный и зеленый цвет, если известно, что Иван Иванович поставил целое количество секций забора.



Решение. Аналогично решению задачи 2.1 с учетом следующих замечаний:
Ширина красной секции = $2a$.
Площадь окрашенной поверхности для одной «красной» секции:

$$S_{\text{к}} = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot 2a \cdot h + 2 \cdot b \cdot \sqrt{h^2 + a^2}.$$

Иван Петрович ставит $2N$секций.

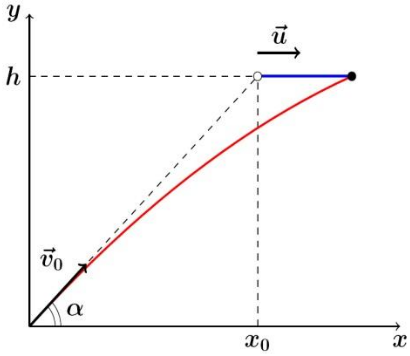
$$A = \frac{N \cdot S_{\text{к}}}{2N \cdot S_{\text{з}}} = \frac{2ah + 2b\sqrt{h^2 + a^2}}{2ah + 2b\sqrt{4h^2 + a^2}}$$

Ответ: $\frac{2ah+2b\sqrt{h^2+a^2}}{2ah+2b\sqrt{4h^2+a^2}}$.

Задача 3. (5 баллов)

3.1. Шпионский квадрокоптер, летевший горизонтально со скоростью 2 м/с на высоте 40 м, был сбит метким выстрелом из пневматической винтовки. Определите скорость вылета пули, если выстрел был произведен точно по цели в тот момент, когда квадрокоптер находился от стрелка на расстоянии 40 м по горизонтали. Размерами квадрокоптера и пули, а также сопротивлением воздуха пренебречь.

Решение.



Траектория движения квадрокоптера представляет собой горизонтальный отрезок (синяя линия на рисунке), а траектория движения пули, на которую действует только сила тяжести — дуга параболы (красная линия на рисунке). По сути, задача состоит в том, чтобы определить значение начальной скорости пули v_0, при которой траектории коптера и пули пересекутся (предполагается, что квадрокоптер и пуля имеют малые, «точечные», размеры).

Запишем уравнения движения коптера:

$$x_{\text{к}} = x_0 + ut; \quad y_{\text{к}} = h,$$

где u — скорость коптера. Уравнения движения пули будут следующими:

$$x_{\text{п}} = (v_0 \cos\alpha)t; \quad y_{\text{п}} = (v_0 \sin\alpha)t - \frac{gt^2}{2},$$

где α — угол вылета пули к горизонту, $g = 9{,}81$ м/с^2 — ускорение свободного падения. Поскольку высота полета коптера h и расстояние по горизонтали до него от стрелка x_0 во время выстрела одинаковы, то $\alpha = 45^0$.

В момент попадания координаты коптера и пули одинаковы, что дает нам систему из двух уравнений, из которой можно найти v_0:

$$\begin{cases} x_0 + ut = (v_0 \cos\alpha)t \\ h = (v_0 \sin\alpha)t - \dfrac{gt^2}{2} \end{cases}.$$

Если учесть, что $x_0 = h$ и $\sin\alpha = \cos\alpha$, то решение данной системы находится достаточно просто

$$(v_0 \sin\alpha)t - \frac{gt^2}{2} = (v_0 \cos\alpha)t - ut \quad \Rightarrow \quad t = \frac{2u}{g}.$$

Отсюда

$$v_0 = \frac{h + ut}{t\cos\alpha} = \frac{h + u \cdot 2u/g}{(2u/g)\cdot\cos\alpha} = \frac{gh + 2u^2}{2u\cos\alpha} = \frac{9{,}81 \cdot 40 + 2 \cdot 4}{2 \cdot 1/\sqrt{2}} \approx 141{,}6 \text{ м/с}.$$

Ответ: 141,6 м/с.

3.2. Шпионский квадрокоптер, летевший со скоростью 2 м/с на высоте 50 м был сбит метким выстрелом из пневматической винтовки. Определите скорость вылета пули, если выстрел был произведен точно по цели, в тот момент, когда квадрокоптер находился на расстоянии 50м (по горизонтали) от стрелка? Сопротивление воздуха не учитывать, ускорение свободного падения 10м/с^2. (Ответ – 181,4 м/с)

Решение. Аналогично решению задачи 3.1.

Ответ: 181,4 м/с.

3.3. Шпионский квадрокоптер, летевший со скоростью 2.5 м/с на высоте 70 м был сбит метким выстрелом из пневматической винтовки. Определите скорость вылета пули, если выстрел был произведен точно по цели, в тот момент, когда квадрокоптер находился на расстоянии 70м (по горизонтали) от стрелка? Сопротивление воздуха не учитывать, ускорение свободного падения 10м/с2.

Решение. Аналогично решению задачи 3.1.
Ответ: 203,6 м/с.

Задача 4. (5 баллов)

4.1. Автобус ходит по круговому маршруту, на котором всего имеется m остановок. Когда автобус отъехал от одной из остановок, в нем было 24 пассажира. На следующих k остановках в автобус заходило по два человека, а на каждой из оставшихся остановок маршрута из него по два человека выходило. При этом оказалось, что в автобусе в среднем по всему маршруту из m остановок находилось 24 пассажира (количество пассажиров в автобусе считается, когда он отходит от данной остановки). Чему могло быть равно k, если известно, что m не больше 24?

Решение. Найдем, сколько было остановок, на которых пассажиры выходили. От первой остановки отправилось 24 пассажира, затем на k остановках пассажиры в автобус заходили; поскольку всего на маршруте m остановок, то выходили пассажиры на $m-(k+1)$ остановке. Обозначим число пассажиров на первой остановке через a_1, а изменение числа пассажиров на последующих остановках — через d. Тогда последовательное изменение числа пассажиров с первой остановки до последней будет

$$a_1,\ a_1+d,\ a_1+2d, \dots,\ a_1+(k-1)d,\ a_1+kd,$$
$$a_1+kd-d, a_1+kd-2d, \dots, a_1+kd-(m-k-1)d.$$

Для того, чтобы найти среднее число пассажиров по маршруту $\langle a \rangle$, нужно сложить все эти значения и получившуюся сумму S поделить на количество слагаемых, т.е. на m.

$$S = ma_1 + d[1+2+\dots+k] + kd(m-k-1) - d[1+2+\dots+(m-k-1)].$$

Слагаемые в квадратных скобках представляют собой арифметические прогрессии, поэтому

$$1+2+\dots+k = \frac{(k+1)k}{2},$$
$$1+2+\dots+(m-k-1) = \frac{(m-k)(m-k-1)}{2}.$$

Соответственно,

$$S = ma_1 + \frac{d}{2}[(k+1)k + 2k(m-k-1) - (m-k)(m-k-1)].$$

Раскрывая скобки и приводя подобные слагаемые, получим, что

$$S = ma_1 + d\left[-k^2 + (2m-1)k - \frac{m^2-m}{2}\right].$$

С учетом того, что $\langle a \rangle = S/m$, имеем

$$\frac{\langle a \rangle - a_1}{d} = -k^2 + (2m-1)k - \frac{m^2-m}{2}.$$

По условию, $\langle a \rangle = a_1 = 24$, поэтому для определения k получается квадратное уравнение

$$k^2 - (2m-1)k + \frac{m^2-m}{2} = 0,$$

корни которого

$$k_1 = \frac{2m - 1 - \sqrt{2m^2 - 2m + 1}}{2}, \qquad k_2 = \frac{2m - 1 + \sqrt{2m^2 - 2m + 1}}{2}.$$

Второй корень нам не подходит, поскольку для него не выполняется условие $k < m$, ведь k должно быть меньше m по крайней мере на единицу из-за того, что самая первая остановка не может входить в число тех, на которых в автобус заходит два человека —

$$2m - 1 + \sqrt{2m^2 - 2m + 1} < 2m \iff 2m(m-1) < 0.$$

Ясно, что последнее неравенство не может выполняться ни при каких $m > 0$ (количество остановок — натуральное число). В случае первого корня аналогичным образом приходим к неравенству

$$\sqrt{2m^2 - 2m + 1} > -1,$$

которое верно при любых m. Однако, по смыслу k должно быть целым положительным числом. Последовательно перебирая значения m от 1 до 24 (по условию $m \le 24$), находим, что нужные k получаются только при следующих трех m:

$$m = 1 \Rightarrow k = 0 \text{ (тривиальное решение)};$$
$$m = 4 \Rightarrow k = 1;$$
$$m = 21 \Rightarrow k = 6.$$

Ответ: $k = 0$, $\mathrm{k} = 1$ и $k = 6$.

4.2. На кольцевой линии метро всего имеется N станций. Когда поезд отъехал от одной из станций, в нем находилось 300 пассажиров. На следующих M станциях в поезд заходило по 25 человек, затем на каждой из оставшихся станций из поезда выходило тоже по 25 человек. При этом оказалось, что в поезде в среднем по всей линии из N станций находилось 300 человек (количество человек в поезде считается, когда он отходит от данной станции). Сколько пассажиров могло быть в поезде, когда он выехал с N-ой станции, если известно, что N не больше 23?

Решение. Аналогично решению задачи 4.1.

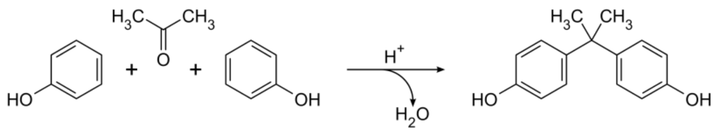
Ответ: 275 (при M= 1) и 100 (при M = 21).

Задача 5. (5 баллов)

5.1. Для очистки сточных вод от химических загрязнений применяется метод нанофильтрации - баромембранный процесс разделения растворов (происходящий под действием градиента давлений), в котором размер задерживаемых частиц обычно находится в пределах 1-10 нм. На одном из производств в 1000 л воды попали продукт реакции конденсации 30 кг фенола с 30 кг ацетона. Запишите уравнение произошедшей реакции конденсации. Назовите полученное вещество по систематической номенклатуре. Найдите, какая мембрана(ы) применяемая для процессов разделения, позволит получить очищенную воду с концентрацией загрязнителя 800 мг/л и менее, если при очистке используются мембраны на основе: полиамида R=75%, полисульфонаR=90%, ацетата целлюлозы

R=98.9%, полиимида R=99.3%,где R – коэффициент задержания, который можно вычислить по формуле: R = (1-C2/C1)*100%, где C1 и C2 – концентрация компонента в исходном и конечном растворе соответственно в процессе мембранного разделения.

Решение. Уравнение реакции:



По уравнению реакции фенол в недостатке. Концентрация бисфенола (4,4'-дигидрокси-2,2-дифенилпропана) в конечном растворе составляет 36 г/л. Подставляя в формулу находим, что для очистки воды подойдут последние 2 мембраны.

Ответ: последние 2 мембраны.

5.2. Для очистки сточных вод от химических загрязнений применяется метод нанофильтрации - баромембранный процесс разделения растворов (происходящий под действием градиента давлений), в котором размер задерживаемых частиц обычно находится в пределах 1-10 нм. На одном из производств в 700 л воды попали продукт реакции конденсации 30 кг фенола с 9 кг ацетона. Запишите уравнение произошедшей реакции конденсации. Назовите полученное вещество по систематической номенклатуре. Найдите, какая мембрана(ы) применяемая для процессов разделения, позволит получить очищенную воду с концентрацией загрязнителя 500 мг/л и менее, если при очистке используются мембраны на основе: полиамида R=75%, полисульфонаR=90%, ацетата целлюлозы R=98.9%, полиимида R=99.3%,где R – коэффициент задержания, который можно вычислить по формуле: R = (1-C2/C1)*100%, где C1 и C2 – концентрация компонента в исходном и конечном растворе соответственно в процессе мембранного разделения.

Решение. Аналогично решению задачи 5.1.

Ответ: только последняя мембрана.