

Олимпиада школьников СПбГУ
2016/2017 учебный год
Инженерные системы

Заключительный этап

ЗАДАЧА № 1

Для проведения праздника в честь открытия нового вещества, на космической станции решили украсить кают-компанию. С этой целью космо-лаборантка вырезает из бумаги произвольные выпуклые шестиугольники. Ее подруга складывает каждый вырезанный многоугольник по линии, соединяющей две произвольные точки на различных сторонах шестиугольника. Через некоторое время подруги заметили, что периметр контура фигуры, получившейся после сгибания, меньше периметра исходного шестиугольника. Это наблюдение они решили незамедлительно проверить, проведя компьютерное моделирование.

Предложите алгоритм такой проверки. Укажите, как можно задать произвольный выпуклый шестиугольник, линию сгиба, и способ нахождения периметра исходного многоугольника и контура фигуры, получающейся после сгиба.

Решение:

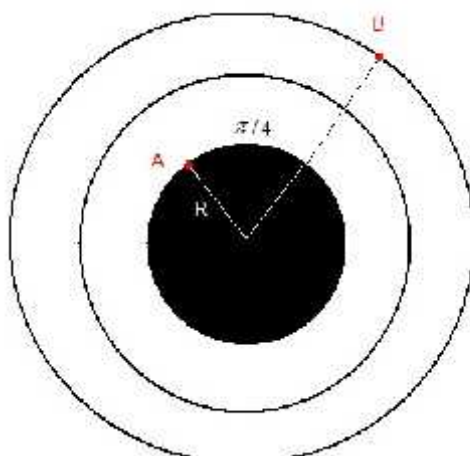
При написании программы необходимо учесть несколько важных моментов:

- 1) При задании точек (вершин шестиугольника), например с помощью генератора случайных чисел, необходимо проверять условие выпуклости получаемой фигуры.
- 2) При выборе точек сгиба необходимо исключить ситуацию когда обе точки сгиба находятся на одной стороне шестиугольника.
- 3) При задании вершин через координаты ДПСК длины отрезков вычисляются достаточно просто.

ЗАДАЧА № 2

При исследовании планеты шарообразной формы с радиусом $R=100$ было замечено, что ее атмосферу можно условно разделить на два слоя. Ближний к поверхности слой состоит из смеси высокотоксичных и химически агрессивных веществ. Максимально возможная скорость полета автономного зонда внутри этого слоя составляет 1 единицу в секунду. Более высокий слой является менее агрессивным и скорость полета зонда в нем составляет 10 единиц в секунду. Толщина каждого слоя одинакова и равна 10 единицам.

Маршрут зонда между орбитальной станцией, расположенной на верхней границе атмосферы в точке B и точкой A на поверхности такой, что угол BOA равен $\pi/4$, (O - центр шара), состоит из двух отрезков прямой BC и CA , где C - некоторая точка на границе между слоями. Найдите угол BOC такой, чтобы маршрут зонда получился кратчайшим по времени.



Напишите программу на языке C, C++, Pascal для поиска минимального времени полета для различных (задаваемых пользователем) параметров: высоты каждого из атмосферных слоев и угла BOA.

Ответ: ~38 с.

Решение: Задача сводится к нахождению точки C, такой что сумма BC+CA являлась минимальной.

Обозначим через Γ угол COB, тогда расстояние AC и CB можно найти по формулам:

$$C^2 = O^2 + O^2 - 2 * O * O * \cos \beta$$

$$A^2 = O^2 + O^2 - 2 * O * O * \cos \left(\frac{\pi}{4} - \alpha \right)$$

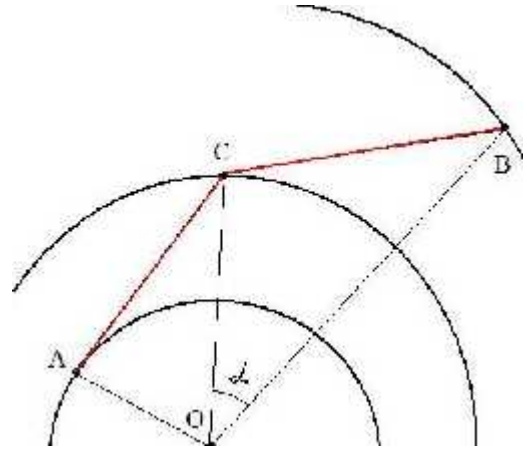
где $O = R = 100$, $O = R + 10$, $O = R + 10 + 10$.

т.о. необходимо минимизировать функцию:

$$AC + CB \rightarrow \min_{\Gamma}$$

При поиске аналитического решения необходимо взять производную по Γ и среди возможных решений выбрать угол, лежащий в промежутке от 0 до $\pi/4$.

При написании программы можно сделать перебор с шагом 0.1 градуса и найти минимальное значение для суммы AC+CB.



ЗАДАЧА № 3

(1)

Два дрона, E2-E4 и R2-D2, исследуют атмосферу планеты. Исследователи заметили, что при подъеме с поверхности планеты на некоторую высоту E2-E4 отстает от R2-D2 на 12 секунд. При спуске вниз, каждый из дронов увеличивает свою скорость на 3 км/ч по сравнению со скоростью подъема; при этом E2-E4 отстает от R2-D2 на 7.2 секунды. Известно, что если средние скорости дронов выразить в км/ч, то значения этих скоростей будут целыми числами. Найдите все возможные пары целых значений средних скоростей подъема дронов.

Ответ: (126;5), (45;6), (18;9).

(2)

При исследовании поверхности планеты два легких дрона прошли некоторое время в атмосферном течении, скорость которого 5 км/ч, из пункта A до пункта B и обратно тем же путем до пункта A. При этом от A до B дроны прошли с разницей в 270 минут, а от B к A – с разницей в 108 минут. Известно, что если средние скорости дронов выразить в км/ч, то значения этих скоростей будут целыми числами. Найдите все возможные пары целых значений средних скоростей дронов.

Ответ: (345;12), (95;13), (45;15), (25;20).

Решение: Обозначим d — расстояние от А до В, v_p — скорость течения, v_1 — скорость более быстрого дрона при его движении против течения, v_2 — скорость более медленного дрона при его движении против течения. Заметим, что разница во времени между дронами получается меньше, при их движении по течению. Учитывая, что 270 минут — это $9/2$ часа, а 108 минут — $9/5$ часа, можно записать для движения дронов против течения

$$\frac{d}{v_2} - \frac{d}{v_1} = \frac{9}{2},$$

а для движения дронов по течению —

$$\frac{d}{v_2 + 2v_p} - \frac{d}{v_1 + 2v_p} = \frac{9}{5},$$

где $2v_p = 10$ км/ч. Выразив в этих двух уравнениях выражение $d v_1 - d v_2$ и приравняв полученные результаты, будем иметь

$$3v_1v_2 = 20(v_1 + v_2 + 20).$$

Это уравнение дает связь между скоростями

$$v_1 = \frac{20v_2 + 200}{3v_2 - 20}.$$

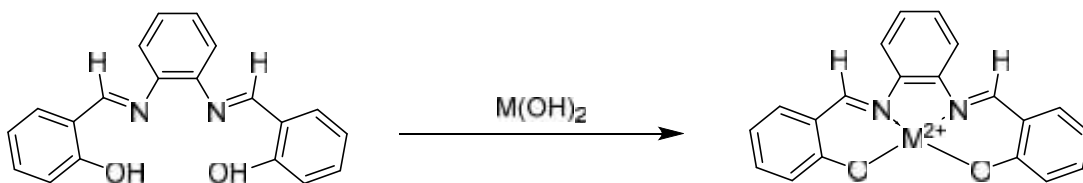
Отсюда ясно, что $v_2 > 6$. Поскольку нас интересуют только целые значения обеих скоростей, то можно найти необходимые пары перебором, начиная со значения $v_2 = 7$. При этом оказывается, если $v_2 > 17$, то $v_2 > v_1$. Это противоречит тому, что v_1 — скорость более быстрого дрона. Таким образом, перебрать потребуется только 11 целых значений скорости v_2 от 7 до 17. Перебором находим следующие целые пары значений скоростей v_1 и v_2 соответственно:

$$(340;7), (90;8), (40;10), (20;15).$$

Для получения ответа к задаче, к каждой из этих скоростей нужно добавить 5 км/ч — скорость течения, поскольку мы нашли скорости дронов при их движении против течения.

ЗАДАЧА № 4

Лаборатория, расположенная на одном из искусственных спутников, занимается изучением различных оснований Шиффа (молекул, содержащих азометиновую группу $RC=N-$), среди которых особое место занимают соединения, являющиеся продуктом взаимодействия салицилового альдегида, а также замещенных салициловых альдегидов, с различными диаминами. Данные соединения, являющиеся тетраденатными N_2O_2 основаниями Шиффа и известные как основания Шиффа саленового типа (от названия простейшего представителя ряда, являющегося продуктом реакции салицилового альдегида и этилендиамина - Salen), способны образовывать устойчивые хелаты с целым рядом переходных металлов.



Рассчитайте, катион, какого из предложенных ниже металлов, наилучшим образом подходит в полость вышеуказанного лиганда. Для расчета используйте следующие данные:

Длины связей			
Связь	Длина (Å)	Связь	Длина (Å)
C-C	1.54	C=C	1.34
C≡C	1.21	C _{Ar} -C _{Ar}	1.4
C-N	1.47	C=N	1.34
C≡N	1.14	C-O	1.43
C=O	1.21	O-H	0.96
H-H	0.6		

Ковалентные радиусы			
Элемент	R (Å)	Элемент	R (Å)
Ca	1,76	Zn	1.22
Mg	1.41	Cu	1,32
Pd	1.39	Pt	1.36
Fe	1.32	Co	1.26
O	0.66	N	0.71

Ответ: Mg, Pb, Pt.

Решение:

