

**Олимпиада школьников СПбГУ
2016/2017 учебный год
Инженерные системы**

Отборочный этап

часть А (задача 1)

Во время собеседования (при приеме на должность камердинера) Паспорту получил от Филеаса Фогга задание: купить продуктов для выпечки пирогов. Перед уходом на собрание научного общества, Фогг выдал Паспорту 24 000 пенсов и отправил на базар за капустой и ингредиентами для теста. Кухарка Филеаса подсказала Паспорту, что из теста и капусты (x_1 и x_2 - целые) можно изготовить $\sqrt{x_1^2 + x_2^2}$ пирогов. На рынке Паспорту нашел все что ему необходимо, но при этом выяснил, что капуста стоит 4 000 пенсов (за единицу продукта), а для изготовления единицы теста потребуется купить ингредиентов на 3 000 пенсов. Какое количество каждого из продуктов необходимо купить Паспорту чтобы кухарка смогла изготовить максимально возможное количество пирогов?

Ответ: 6 частей теста и 1 часть капусты.

Решение:

Составим уравнение стоимости покупки: $x_1 * 3000 + x_2 * 4000 \leq 24000$, где x_1 это количество единиц теста, а x_2 количество единиц капусты. Сведем в таблицу все возможные пары x_1 и x_2 целых чисел и соответствующие им значения функции $\sqrt{x_1^2 + x_2^2}$:

x_1	1	2	3	4	5	6
x_2	5	4	3	3	2	1
$\sqrt{x_1^2 + x_2^2}$	$\sqrt{26}$	$\sqrt{20}$	$\sqrt{18}$	$\sqrt{25}$	$\sqrt{29}$	$\sqrt{37}$

Заметим, что в данную таблицу не включены крайние значения для x_1 и x_2 т.к. в случае если $x_1 = 0$ то получаем "парадокс" при котором пирожки не содержат в себе тесто, а в случае $x_2 = 0$ пирожки фактически не содержат начинки и это уже не пирожки.

часть А (задача 2)

(1)

Научное общество Британии составило рейтинг ученых. В портфолио Филеаса Фогга было 50 статей, грамот и изобретений. Каждое изобретение оценили в 50, статью в 10, а грамоту в 2 звездочки. Общий рейтинг Фогга составил 300 звездочек.

- а) Напишите программу (алгоритм), с помощью перебора вариантов определяющую количество изобретений, грамот и статей Филеаса.
б) Решите задачу в п. а) аналитически (не прибегая к перебору).

Ответ: (1, 19, 30); (2, 13, 35); (3, 7, 40); (4, 1, 45);.

(2)

Для торжественной встречи Филеаса Фогга, был приготовлен салюта из 50 фейерверков, каждый из которых дает либо 25 залпов, либо 5 залпов, либо 1 залп. Всего в салюте должно состояться 150 залпов.

а) Напишите программу (алгоритм), с помощью перебора вариантов определяющую количество фейерверков, имеющих заряд на 25, 5 и 1 залп соответственно.

б) Решите задачу п. а) аналитически.

Ответ: (1, 19, 30); (2, 13, 35); (3, 7, 40); (4, 1, 45);.

(3)

Для торжественных проводов Филеаса Фогга в дальнее путешествие из гавани вышли 50 судов разной вместимости с провожающими. В число этих судов входили: яхты вместимостью 25 человек, небольшие катера на 5 человек и маленькие лодки на 1 человека. Всего Филеаса провожало 150 человек.

а) Напишите программу (алгоритм), с помощью перебора вариантов определяющую количество задействованных судов каждого вида.

б) Решите задачу п. а) аналитически.

Ответ: (1, 19, 30); (2, 13, 35); (3, 7, 40); (4, 1, 45);.

Решение:

Пусть x_1 - количество яхт, x_2 - количество катеров, а x_3 - количество лодок.

По условию задачи, общее число судов составляет: $x_1 + x_2 + x_3 = 50$.

При этом общее число провожающих составляет: $25x_1 + 5x_2 + x_3 = 150$.

При совместном решении этих уравнений получаем: $24x_1 + 4x_2 = 100$.

Или иначе: $x_2 = 25 - 6x_1$.

Согласно условию задачи x_1 , x_2 и x_3 - целые числа. Рассмотрим в виде таблицы все возможные значения x_1 и найдем значения для остальных переменных:

x_1	x_2	x_3
1	19	30
2	13	35
3	7	40
4	1	45

Составленный алгоритм должен содержать указанный перебор.

часть А (задача 3)

(1)

Во время кругосветного путешествия Филеас Фогг построил воздушный шар из материала, квадратный метр которого весит 0,5 кг. Построенный шар имел радиус 6 м. и был наполнен гелием. Сколько человек (весом по 80 кг каждый) сможет поднять такой воздушный шар?

_____ : 0,18 / 3, 1,29 / 3.

Ответ: поднимет 9 человек (по 80 кг каждый).

(2)

Во время кругосветного путешествия Филеас Фогг построил воздушный шар из материала, квадратный метр которого весит 0,5 кг. Построенный шар имел радиус 6 м. и был наполнен водородом. Сколько человек (весом по 80 кг каждый) сможет поднять такой воздушный шар?

_____ : 0,09 / 3, 1,29 / 3.

Ответ: поднимет 10 человек (по 80 кг каждый).

(3)

Во время кругосветного путешествия Филеас Фогг построил воздушный шар из материала, квадратный метр которого весит 0,5 кг. Построенный шар имел радиус 6 м. и был наполнен гелием. Поднимет ли этот шар корзину с двумя пассажирами, их багажом и балластом общим весом 320 кг., а так же восьмидесяти-киллограмового сыщика Фикса, тайно укрывшегося в корзине.

_____ : 0,18 / 3, 1,29 / 3.

Ответ: шар поднимется.

Решение: Для того чтобы шар поднялся необходимо чтобы выталкивающая сила превосходила силу тяжести: $M \leq F_{\text{выт}}$ где $F_{\text{выт}} = \rho_{\text{воздуха}} g V$ т.е.:

$$M \leq \rho_{\text{воздуха}} g V.$$

Сократим на g и получим неравенство в виде: $M \leq \rho_{\text{воздуха}} V$.

Найдем общую массу шара с пассажирами:

$$M = m_{\text{пассажиров и груза}} + m_{\text{газа в шаре}} + m_{\text{оболочки шара}}$$

где:

$$m_{\text{газа в шаре}} = \frac{4}{3} \pi R^3 \rho_{\text{Гелия}} = 163 \text{ кг},$$

$$m_{\text{оболочки шара}} = \frac{4}{3} \pi R^3 m_{\text{кв.метра материала}} = 226 \text{ кг},$$

$$m_{\text{пассажиров и груза}} = 320 + 80 = 400 \text{ кг}.$$

Подставим найденные значения и проверим справедливость неравенства $M \leq \rho_{\text{воздуха}} V$:

$$789 \leq 1167$$

Т.е. шар поднимется в воздух.

часть А (задача 4)

(1)

Устроившись на привал на берегу лесной речки Филеас Фогг дал задание Паспорту найти сухие березовые поленья (длиной 30 см и радиусом около 4 см). Пока Паспорту занят поисками, Фогг построил шалаш, в котором собрался организовать баню и набрал ведро (10 л) речной воды (температурой 15°C). Сколько поленьев надо найти если при нагревании воды на костре только 10% выделяющегося тепла совершает полезную работу?

Справочные данные: удельная теплота сгорания сухой березы 13 МДж, удельная теплоемкость воды 4,2 кДж, плотность сухой березы 700кг/м3.

Ответ: надо 3 полена.

Решение:

$$qm_{\text{дров}}\eta = cm_{\text{воды}}(t_2 - t_1)$$

Получаем массу дров около 2,75кг. Пусть масса одного полена = 1кг т.о. необходимо 2 целых и $\frac{3}{4}$ полена (допустимо округление до 3).

(2)

Устроившись на привал на берегу лесной речки Филеас Фогг решил вскипятить 5 литров воды для приготовления обеда. К великому сожалению котелок украл Фикс, но Фогг соорудил берестяной котелок, а для нагрева воды бросить в этот котелок разогретые на костре камни. Сколько камней понадобится (масса каждого камня 3 кг.)?

Справочные данные: удельная теплоемкость этой породы 880 Дж/(кг °С), удельная теплоемкость воды 4,2 кДж/(кг °С), камни разогрели до 600°С.

Ответ: надо 2 камня.

Решение:

$$c_{\text{каменя}} m_{\text{каменей}} (t_{2к} - t_{1к}) = c_{\text{воды}} m_{\text{воды}} (t_{2в} - t_{1в})$$

Находим массу камней: около 4 кг т.е. одного камня массой 3 кг мало.

Необходимо 1 и $\frac{1}{3}$ камней (допускается ответ 2 камня т.к. дробление не предусмотрено).

часть А (задача 5)

(1)

Во время поездки в поезде, читая научно-фантастический роман, Паспорту узнал о проекте аргонового лазера, работающего на длине волны 488 нанометров. К своему сожалению он плохо разобрался в единицах измерений и попросил Филеаса перевести их в микрометры. Каков будет ответ Фогга?

Ответ: 0.488 мкм.

(2)

Во время поездки в поезде, читая научно-фантастический роман, Паспорту узнал о проекте азотного лазера, работающего на длине волны 337.1 нанометра.

(1 = 10⁻⁸). Каков будет ответ Фогга?

Ответ: 3371 Å.

(3)

Во время поездки в поезде, читая научно-фантастический роман, Паспорту узнал о проекте рубинового лазера, работающего на длине волны 694.3 нанометра. К своему сожалению он плохо разобрался в единицах измерений и попросил Филеаса перевести их в микрометры. Каков будет ответ Фогга?

Ответ: 0.6943 мкм.

Решение: Учитывая, что $1 \text{ нм} = 10^{-9} \text{ м}$, а $1 \text{ мкм} = 10^{-6} \text{ м}$, для длины волны лазера имеем

$$694.3 \cdot 10^{-9} \text{ м} = 6.943 \cdot 10^{-7} \text{ м} = 0.6943 \cdot 10^{-6} \text{ м} = 0.6943 \text{ мкм}.$$

(4)

Во время поездки в поезде, читая научно-фантастический роман, Паспорту узнал о проекте гелий-неонового лазера, работающего на длине волны 632.8 нанометров.

($1 \text{ нм} = 10^{-9} \text{ м}$). Каков будет ответ Фогга?

Ответ: 6328 Å.

Решение: Учитывая, что $1 \text{ нм} = 10^{-9} \text{ м}$, а $1 \text{ Å} = 10^{-10} \text{ м}$, для длины волны лазера имеем

$$632.8 \cdot 10^{-9} \text{ м} = 6328 \cdot 10^{-10} \text{ м} = 6328 \text{ Å},$$

где Å — символ ангстрема.

часть Б (задача 1)

(1)

Во время путешествия по пустынной местности Филеас Фогг и Паспорту наткнулись на провал в земле. Запасливый Фогг заранее прихватил с собой 20 метров веревки и рассчитывал, что ее хватит для того чтобы спуститься и исследовать дно. Для определения глубины провала Фогг бросил вниз камень. Звук удара пришел через 5 секунд. Хватит ли Фоггу веревки для спуска? Скорость звука принять 340 м/с

Ответ: нет, не хватит.

(2)

Во время путешествия по пустынной местности Филеас Фогг и Паспорту наткнулись на колодец с лежащим рядом ведром. Запасливый Фогг заранее прихватил с собой 20 метров веревки и рассчитывал, что ее хватит для того чтобы достать воды. Для определения глубины колодца Фогг бросил вниз камень. Звук удара о воду пришел через 5 секунд. Хватит ли Фоггу веревки для того чтобы достать воду? Скорость звука принять 340 м/с.

Ответ: нет, не хватит.

Решение:

Предположим, что глубина колодца 20 метров. Рассчитаем сколько потребуется времени камню для падения на такую глубину и для того чтобы звук от падения преодолел обратный путь.

Из формулы $S = gt^2/2$ получаем, что на глубину 20 метров камень упадет через $t = \sqrt{2S/g} = \sqrt{2 * 20/10} = 2$ секунды. (Если взять $g=9.8$ то время увеличится.)

За это время (2 секунды) звук от падения камня на глубину 20 метров вернется через: $t = S/V = 20/340 = 1/17 \approx 0,59$ секунды т.о. если бы глубина колодца была 20 метров то звук от падения камня услышали бы раньше чем через 5 секунд. Следовательно, глубина больше 20 метров т.е. веревки не хватит.

часть Б (задача 2)

(1)

Во время путешествия по Америке Филеас Фогг был свидетелем местного развлечения — тараканьих бегов. Наблюдая за одним из тараканов, Фогг заметил, что он пробегает всю беговую дистанцию следующим образом: $1/7$ часть дистанции он бежит со скоростью 12 см/с, $1/8$ часть дистанции со скоростью 13.5 см/с, $1/9$ часть со скоростью 15 см/с и так далее. При этом вся дистанция укладывается в целое число таких этапов. Какой может быть длина таракана, если длина дистанции составляет 2.7 метра?

Ответ: примерно 2.82 см.

(2)

Чтобы догнать Филеаса Фогга и Паспорту, сыщику Фиксу необходимо преодолеть участок спокойной реки длиной в 2000 метров на лодке. Пройдя четверть дистанции со скоростью 8 км/ч, сыщик стал понимать, что не успевает, и следующую одну пятую часть дистанции прошел со скоростью 10 км/ч. Вновь пересчитав данные, Фикс понял, что необходимо повысить скорость до 12 км/ч и следующие $1/6$ часть дистанции прошел с этой скоростью. Вновь пересчитав, сыщик опять увеличил скорость аналогично ранее описанной схеме и т.д. В конечном итоге вся дистанция уложилась в целое число таких этапов. Какой может быть длина лодки?

Ответ: примерно 8.73 м.

Решение: Заметим, что

$$1/4 + 1/5 + 1/6 + 1/7 + 1/8 + 1/9 \approx 0.99563,$$

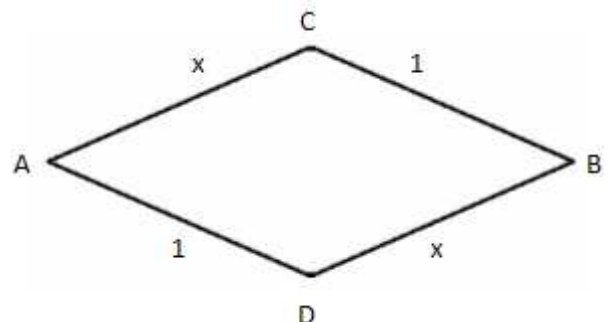
а

$$1/4 + 1/5 + 1/6 + 1/7 + 1/8 + 1/9 + 1/10 \approx 1.09563.$$

Поскольку $0.99563 * 2000 \approx 1991.27$, а $1.09563 * 2000 \approx 2191.27$ (т.е. больше длины дистанции), то для преодоления 2000 метров потребовалось 6 этапов. Недостающие до 2000 примерно 8.73 м — это длина лодки, нос которой в начале дистанции находится на отметке 0 метров, а в конце дистанции — на отметке 2000 метров. Отметим, что здесь в условии задачи значения скоростей являются избыточными данными.

часть Б (задача 3)

Из пункта А в пункт В Филеас Фогг и Паспорту должны пройти по



узкому ущелью. Согласно карте, расположенной на информационном стенде, этот путь можно преодолеть одним из двух путей – через промежуточный пункт С, лежащий на одной стороне ущелья или через пункт D, лежащий на другой стороне ущелья. При этом участки пути (A,D) и (C,B) широкие и любой путник проходит их за 1 час. Участки пути (A,C) и (D,B) представляют собой узкую тропу, скорость движения по которой пропорциональна количеству идущих человек (20 человек = 20 минут движения для каждого человека из этих 20). Согласно данным на информационном стенде, каждый день по ущелью проходит 60 человек.

Быстро прикинув, Паспорту выдвинул идею о строительстве короткого моста из пункта С в пункт D и пытался доказать Фоггу что это ускорит общую скорость движения и сократит время в пути каждого из 60 проходящих по ущелью. Фогг не согласился с этим выводом в силу того, что каждый из этих 60, начиная путь, не знает о том как пойдут другие и руководствуется только схемой на информационном стенде. В результате, построенный мост (С, D) никак не улучшит ситуацию. Кто из спорщиков прав? Объясните ответ.

Ответ: Нет, строительство моста не улучшит общую ситуацию.

Решение:

Рассмотрим ситуацию когда моста нет. В этом случае каждый пешеход с равной вероятностью будет выбирать один или другой путь т.к. для пешеходов они одинаковы. Предположим, что 30 человек пошли одним путем, а 30 пошли другим. Если в точке А имеется регулировщик который каждого четного путника отправляет по одному пути, а не четного по другому, тогда каждый из пешеходов затратит 1 час и 30 минут. Если регулировщика нет то время пути по одному из путей будет лежать в пределах от 1 часа 31 минуты до 2 часов. Это не улучшает общую ситуацию.

Предположим, что мост построен. В этом случае возможны 2 варианта выбора пути от А к В с использованием нового моста между точками С и D:

- 1) Если пешеход выбирает путь AD то тратит на его преодоление 1 час. Если в точке D пешеход переходит по мосту в точку С то дальше он продолжает движение по пути СВ и тратит на этот путь 1 час. Итого, от А к В он затратит 2 часа.

Такой путь является максимальным по длительности даже в случае когда моста нет. Однако, Паспорту утверждает, что именно наличие моста улучшит ситуацию для каждого путника.

- 2) Если пешеход выбирает путь AC и далее DB то время, затраченное на весь путь, будет зависеть от количества человек, выбравших этот путь.

Заметим, что каждый из входящих в ущелье не имеют информации о том какой путь выбрали остальные пешеходы. Фактически это означает, что 1-ый подошедший, изучив план, выберет путь AC и далее DB т.к. теоретически этот путь приведет его в конечную точку через $1+1=2$ минуты т.к. выбор другого пути (AD + CB) обещает потерю времени в 2 часа. Такой логике будет следовать каждый путник, желающий сократить время своего движения. Но при этом, не зная выбора остальных, этот путник ошибается в своих оценках т.к. не учитывает выбор других путников в своих расчетах. В результате все 60 человек выберут путь AC и далее DB, но тем самым они затратят $60+60$ минут, что не отличается от выбора пути AD (1 час) и далее CB (1 час).

Таким образом, наличие моста не улучшит общую ситуацию.

часть Б (задача 4)

(1)

Путешествуя по городам Европы, Филеас Фогг заметил, что высокие шпили башен в лучах заходящего солнца отбрасывают тень в виде вытянутого остроугольного треугольника, две стороны которого имеют длину одного порядка, а третья во много раз меньше. Фогг быстро понял, что площадь тени достаточно легко можно посчитать по придуманной им упрощенной формуле.

а) Выведите приближенную формулу для вычисления площади такого треугольника.

б) Проведите компьютерный эксперимент по оценке качества своей формулы, взяв две стороны треугольника равными 110 м и 115 м, а третью сторону – от 6 м до 7 м с шагом 5 см (т.е. берем последовательно значения 1; 1,05; 1,1; ... ; 1,95; 2). Вычислите площадь каждой такой тени дважды – по одной из известных из курса геометрии формул, а также по своей приближенной формуле. Найдите среднее значение абсолютной погрешности. Приведите код программы и полученное среднее значение абсолютной погрешности.

(2)

Путешествуя по странам Филеас Фогг не раз замечал, что кузнецы, при изготовлении длинных кинжалов, зная необходимую длину бокового лезвия, достаточно точно выбирают необходимый кусок заготовки. Пытаясь разгадать этот секрет, Фогг обратил внимание на то, что клинок имеет форму треугольника у которого длина двух сторон одного порядка, а угол между ними очень мал. Филеас догадался, что мастера пользуются упрощенной формулой для вычисления площади такого остроконечного треугольника и тем самым понимают размеры необходимой заготовки.

а) Выведите приближенную формулу для вычисления площади такого треугольника.

б) Проведите компьютерный эксперимент по оценке качества своей формулы, взяв две стороны треугольника равными 25 см и 27 см, а угол между ними – от 10° до 20° с шагом 1° (т.е. берем последовательно значения 10°; 11°; ... ; 20°). Вычислите площадь каждого такого треугольника дважды – по одной из известных из курса геометрии формул, а также по своей приближенной формуле. Найдите среднее значение абсолютной погрешности. Приведите код программы и полученное среднее значение абсолютной погрешности.

Решение:

Предположим, что клинок имеет форму прямоугольного треугольника у которого один из катетов равен 25 см, а гипотенуза 27 см. Вычислим площадь треугольника по формуле

$S = 25 * (27 * \sin \Gamma) / 2$ при различных значениях угла. Выпишем результат в виде

таблицы:

угол Γ	10	15	20
Площадь S	~58,606	~87,351	~115,432

Заметим, что при угле 10 градусов площадь треугольника примерно равна сумме двух длинных сторон: 25+27=52. Ошибка при этом составляет около 8-10%. Таким образом качество формулы быстрого но примерного вычисления площади треугольника с углом в 10 градусов можно принять

формулу: $S = (x + y)$, где x и y это известные "длинные" стороны треугольника. Можно рассмотреть модификацию этой формулы и учесть ошибку в 10%:

$$S = (x + y) + (x + y) * 0,1 \quad (1)$$

При этом заметим, что при угле в 15 градусов достаточно умножить полученное для 10 градусов значение на 3/2, а при угле в 20 градусов достаточно умножить значение (для 10 градусов) на 2. Данную пропорцию можно построить для всего промежутка от 10 до 20 градусов.

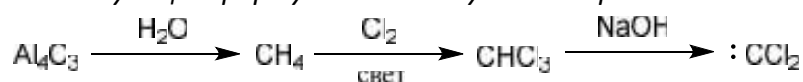
Выпишем эти значения в виде таблицы:

угол Γ :	10	15	20
Площадь S :	~ 58,606	~ 87,351	~ 115,432
По формуле (1) с учетом пропорции:	57,2	$57,2 * 3/2 = 85,8$	$57,2 * 2 = 114,4$
Оценка ошибки:	2-3%	1-2%	~ 1%

Следует заметить, что данный подход (формула (1) и пропорция) не является единственным.

часть Б (задача 5)

В одном из научно-популярных журналов Филеас Фогг прочитал о таинственном племени в джунглях, жители которого живут на высоком плато, не могут с него спуститься и потому называют плато и все племя «Мир». Особенность племени заключается в том, что оно умеет практически мгновенно распознавать направление спина у карбена*. Особенностью карбена является то, что направление спина имеет всего два значения. Воспользовавшись этим племя изобрело алфавит в котором каждой букве соответствует некоторое количество ячеек в каждой из которых находится карбен с соответствующим спином (т.е. при смене спина – буква меняется, при изменении количества ячеек – буква меняется). Для того чтобы быть готовым приветствовать жителей племени, Филеас заранее решил рассчитать необходимое количество карбида алюминия для того чтобы воспроизвести слово «Helloworld!» Для этого он воспользовался следующей формулой для получения карбена:



Какую массу технического карбида алюминия с массовой долей карбида 80% необходимо взять, для «записи» на карбенах послания «Helloworld!», если выход каждой из стадий вышеуказанной схемы реакций составляет 70%.

* Карбены — соединения двухвалентного углерода. Это нестабильные высокореакционноспособные соединения с шестью валентными электронами и общей формулой R_1R_2C : (два заместителя и электронная пара). Существует два состояния карбенов: синглетное и триплетное. Синглетным карбеном называют тот, в котором два несвязывающих электрона со спаренными спинами находятся на одной орбитали. В триплетной форме карбена два неспаренных электрона с параллельными спинами находятся на двух орбиталях одинаковой энергии. Таким образом, в зависимости от состояния карбена, его спин может принимать значение 0 и 1.

Решение (рекомендации):

В ходе решения необходимо:

- 1) описать каким образом формируется алфавит из которого берутся буквы, определив тем самым необходимое количество битов для фразы;
- 2) указать какая единица вещества соответствует 1 биту;
- 3) по химической формуле необходимо определить количество исходного вещества для формирования указанной фразы с учетом количества бит, отводимых на фразу.