

**Олимпиада школьников СПбГУ
2015/2016 учебный год
Инженерные системы**

Задача №1. Во время прыжка с парашютом Феликса Баумгартнера с высоты 39 км его максимальная скорость в свободном полете составила 1357.6 км/ч. А чему будет равна эта величина, если скорость измерять не в километрах в час, а в радиусах Земли в год?

Ответ: $1868.1 R_3 / \text{год}$.

Решение: Возьмем следующие значения для радиуса Земли R_3 и года:

$$R_3 = 6370 \text{ км,}$$

$$1 \text{ год} = 365.24 \text{ суток} = 8765.76 \text{ часов.}$$

Тогда

$$1 \frac{\text{км}}{\text{ч}} = 1 \frac{R_3 / 6370}{\text{год} / 8765.76} = \frac{8765.76}{6370} \frac{R_3}{\text{год}} \approx 1.376 \frac{R_3}{\text{год}}.$$

При этом скорость Феликса Баумгартнера в требуемых единицах составила

$$1357.6 \cdot 1.376 R_3 / \text{год} \approx 1868.1 R_3 / \text{год}.$$

Задача №2. У Фродо осталась ровно одна неделя для того, чтобы добраться до Роковой горы в Мордоре и уничтожить Кольцо Всевластья. При этом Фродо со своей обычной скоростью может за неделю проходить по 239 км. Однако этот поход его страшит, и чем ближе Мордор, тем медленнее становится шаг хоббита. Поэтому сначала в течение одной трети недели он идет со скоростью в три раза меньшей обычной, затем четверть недели он идет со скоростью в четыре раза меньшей обычной, потом в течение одной пятой части недели он идет с одной пятой от обычной скорости и так далее. Успел ли Фродо, двигаясь таким образом, добраться до Роковой горы вовремя, если в начале пути до неё оставалось 59 километров 400 метров?

Ответ: Нет, не успел.

Решение: Обозначим обычную скорость Фродо как v_F . При этом $v_F = 239$ км/нед (километров в неделю). Общее время в пути составляет ровно одну неделю. Посмотрим, на какие части разбивается эта неделя в соответствии с условием. Заметим, что

$$1/3 + 1/4 + 1/5 + 1/6 = 0.95,$$

продолжая рассуждения дальше, получаем:

$$1/3 + 1/4 + 1/5 + 1/6 + 1/7 \approx 1.093,$$

то есть больше, чем одна неделя. Соответственно, неделя пути разбивается следующим образом:

$$1 = 1/3 + 1/4 + 1/5 + 1/6 + 1/20.$$

При этом Фродо 1/3 недели двигался со скоростью $v_F/3$, 1/4 недели — со скоростью $v_F/4$, 1/5 недели — со скоростью $v_F/5$, 1/6 недели — со скоростью $v_F/6$ и 1/20 недели — со скоростью $v_F/7$. Таким образом, расстояние, пройденное хоббитом за одну неделю, равняется

$$v_F \cdot \left(\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} + \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} + \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{5} + \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} + \frac{1}{20} \cdot \frac{1}{7} \right) \approx 59.399 \text{ км},$$

что меньше, чем 59 километров 400 метров.

Задача №3. Экспериментально обнаружено, что заряд нашей планеты отрицательный и равен по модулю около 600000 К. Ионосфера заряжена положительно. В атмосфере текут токи проводимости плотностью порядка 10^{-6} мкА/м². Они стремятся разредить Землю. Определите, за сколько времени это должно произойти? Однако, существуют механизмы, поддерживающие заряд Земли. Одним из таких механизмов являются грозы. Длительность молнии около 0,001 сек., сила тока может достигать 60 кА. Сколько молний должно ударить в землю за сутки, чтобы поддерживать заряд планеты? Какое количество энергии при этом выделяется? (Можно ли предложить способ использовать эту энергию?)

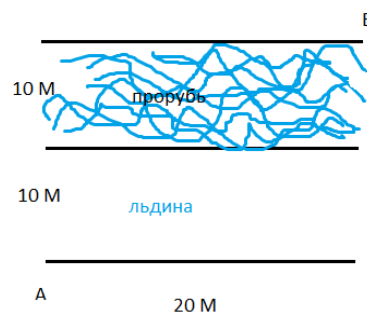
Решение:

Определяем примерное время, за которое планета должна разрядиться. Плотность тока — величина, равная отношению силы тока к площади (А/м²). Вычисляем площадь поверхности Земли, считая ее сферической (радиус можно принять 6400 км). Далее, из определения силы тока ($I = Q/t$) вычисляем время. Получается около 20 минут.

Количество молний, необходимых для зарядки, также можно вычислить из определения силы тока. Посчитать сколько заряда приносит одна молния, а затем вычислить необходимое количество молний.

Задача №4.

Пингвин плавает со скоростью 10 м/с, а бежит со скоростью 1 м/с. Ему надо срочно попасть из точки А в точку В. Проложите для пингвина маршрут, который займет наименьшее время.



Решение: Решить задачу возможно несколькими способами.

Для поиска решения, на границе льда и воды необходимо найти точку X такую, что сумма $AX+XB$ будет минимальна по времени движения вдоль этой траектории. Фактически задача сводится к применению закона о преломлении света при переходе из одной среды в другую.

Другой способ - математический. Можно выразить время через расстояние $AX + BX$, содержащие параметр X (координата искомой точки) и найти минимум данной функции.

Следует заметить, что **многие участники ошибочно рассуждали** следующим образом: "Что бы пингвин быстрее преодолел препятствие он должен быстрее преодолеть каждый из участков т.е. там где он имеет минимальную скорость он должен двигаться по кратчайшей прямой т.е. перпендикулярно точки A , следовательно там где у пингвина максимальная скорость он будет двигаться по гипотенузе треугольника со стороной 20 и 10 метров. Соответственно, задача сводится к поиску длины гипотенузы при известных катетах." Такой подход к решению ошибочен!

Задача №5. Ученица физико-математического класса бежит стометровку. Первую половину дистанции она равномерно ускоряется, в результате набирает скорость 5 м/с и вторую половину дистанции пробегает с этой скоростью. Пульс ученицы на старте был 90 ударов в минуту, а в конце дистанции – 120 ударов в минуту. Считая, что пульс возрастал равномерно всю дистанцию, определите, какую работу совершило сердце ученицы за время пробега. Работа сердца за одно сокращение составляет 1 Дж.

Решение:

Для решения необходимо посчитать количество сокращений сердца за время пробега дистанции, считая, что пульс возрастает равномерно. Первая часть – решение простой кинематической задачи на равномерное (50 м) и ускоренное (50 м) движение. В результате определяется время пробега дистанции.

Для того чтобы определить количество ударов можно воспользоваться аналогией с законами кинематики: «пульс на старте = начальная скорость», «пульс на финише = конечная скорость». Пульс растёт равномерно («ускорение»), следовательно, общее количество ударов зависит от времени аналогично пути в кинематике – квадратично.

Можно вывести эту зависимость математически, используя понятие производной (11 класс средней школы). Записать пульс (количество ударов за время $p=dn/dt$) и возрастание пульса ($ap=dp/dt$), решить эти уравнения и получить зависимость $n=n(t)$.

Задача №6. Сознательный ученик решил заменить у себя в комнате лампу накаливания (60 Ватт) на светодиодную (6 Ватт). Каждый день он пользуется лампой в течение 3 часов. Определите, какое количество угля (нефти, газа?) это позволило сэкономить за неделю (за месяц). Среднее значение КПД тепловой электростанции 30%.

Решение:

Коэффициент полезного действия – отношение полезной работы к затраченной. Полезная работа, в данном случае, это работа лампочек (определяется через мощность и время), затраченная – это теплота, выделяющаяся при сгорании топлива, откуда и определяется масса топлива.

Задача №7. В ходе поиска внеземных цивилизаций (проект SETI) был принят сигнал из 1000 знаков (0 и 1). Аналитическая группа предположила, что каждая буква внеземного алфавита состоит из 5 знаков. К сожалению сигнал был слаб и каждая группа из 5 знаков имеет не более 1 ошибки (т.е. при передаче группы 00100 могло быть получено 10100 или 01100 или 00110 или 00101 или 00000).

Необходимо составить программу для поиска алфавита внеземной цивилизации (каждая буква - индивидуальна). При этом необходимо учесть, что внеземная цивилизация учла возможность возникновения помех и составила свой алфавит так, что при изменении одного символа в каждой букве (группа из 5 символов) не приводит к возникновению новой буквы.

Входной файл состоит из набора знаков (не более 1000) не разделенных пробелом.

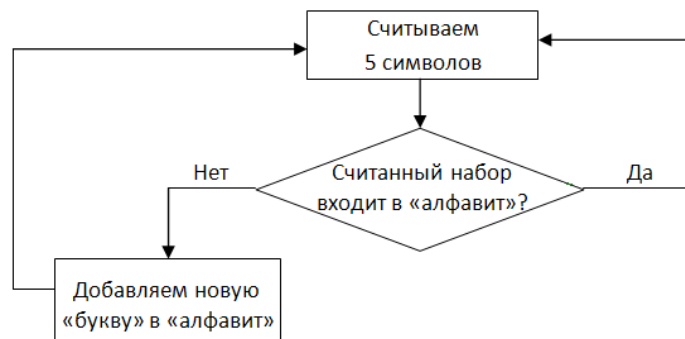
Результатом должен быть алфавит (каждой букве присваивается произвольное значение) и расшифрованное с помощью него сообщение (не обязательно имеет смысл).

Решение: (Задача на систематизацию информации и составление каталога.)

Согласно условию задачи, "алфавит" состоит из "букв" длиной 5 символов (каждый символ либо "0", либо "1"). При написании программы необходимо организовать считывание групп из 5 символов и посимвольное сравнение каждой группы с находящимися в "алфавите".

Задачу можно решить несколькими способами:

Последовательный **перебор** всех "букв" в сообщении пока не будет достигнут конец передаваемого сообщения и реализации упрощенной блок-схемы:



В этом случае первые 5 считанных символов автоматически станут первой буквой "алфавита". Последующие группы по 5 символов будут сравниваться с уже найденными и, согласно блок-схеме, либо признаваться уже входящими в "алфавит", либо будут новыми "буквами" этого "алфавита".

Проверку каждого нового набора из 5 символов с "буквами" "алфавита" необходимо проводить посимвольно т.к. по условию задачи при искажении меняется только ОДИН символ, а порядок их следования не меняется. При реализации данного сравнения многие участники забывали об этом условии и сравнивали количество «нулей» и «единиц» - такой подход является ошибочным и это легко показать на примере двух наборов: 00001 и 10000 (количество «нулей» и «единиц» одинаково у обоих наборов; однако никакое изменение ОДНОГО символа первого набора не приведет его в тождество со вторым набором – для тождественности необходимо изменение ДВУХ символов – первого и последнего).

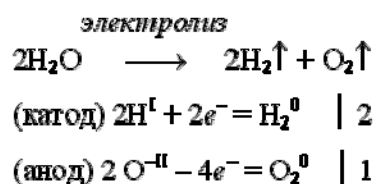
По условию задачи необходимо каждой букве "алфавита" присвоить какую либо букву из русского алфавита (например) и вывести расшифрованное сообщение. Лучше всего это делать параллельно с реализацией алгоритма т.е. при проверке условия на вхождение набора из 5 символов в "алфавит".

Данную задачу можно решить **аналитически**, т.е. найти "алфавит" (набор "букв"), удовлетворяющего условиям задачи (основное требование: изменение одного символа в какой-либо "букве" найденного "алфавита" не приводит к образованию другой "буквы" из этого же "алфавита")¹. Если такой набор будет найден, то дальнейшее решение (программа) сводится к считыванию из сообщения групп по 5 символов и поиск в "алфавите" соответствующей буквы.

Задача №8. Какое количество электрического тока необходимо пропустить через водный раствор гидроксида натрия, чтобы выделившийся на катоде газ в смеси с воздухом смог поднять воздушный шар массой 1г. Объем газа в шаре должен составлять 10 литров.

Ответ: 16984 Кл.

Решение: В результате электролиза водного раствора гидроксида натрия на катоде выделяется водород:



Считая температуры газа-наполнителя и воздуха одинаковыми, подъёмную силу можно выразить формулой:

$$F = \frac{29 - M}{22.4}$$

где M -молярная масса газа-наполнителя.

¹ Предлагаем самостоятельно проверить алфавит, состоящий из следующего набора букв: 11000, 00110, 10011, 01101. В чем преимущества и недостатки этого набора?

По условию задачи объем газа-наполнителя должен быть 10 литров и его подъемная сила должна быть 1 грамм, тогда подставляя в формулу, получаем

$$0.1 = \frac{29 - M}{22.4}$$

решая это уравнение, получаем, что $M=26,76$. Полученное значение есть средняя молярная масса неизвестной смеси воздуха и водорода. Молярная доля водорода в этой смеси может быть найдена из следующего уравнения:

$$29 \times (1 - X) + 2 \times X = 26.76$$

Т.е. $X = 0.0088$, тогда число моль водорода в 10 литрах смеси будет равно 0.088 моль.

Постоянная Фарадея равна $F=96500 \text{ Кл} \cdot \text{моль}^{-1}$, в соответствии с уравнением электролиза для получения 0.088 моль водорода необходимо пропустить 2×0.088 моль электронов через систему, их заряд составит 16984 Кл.

Задача №9. Определите массу ^{238}U которая необходима для заполнения гелием за 800 дней воздушного шара массой 10г, если на каждый литр пространства, заполненного гелием, будет действовать архимедова сила в размере 1,115 грамм, период полураспада ^{238}U составляет $4,47 \cdot 10^9$ лет.

Ответ: 138 372 тонны

Решение: Существует несколько формулировок Закона радиоактивного распада, например, в виде дифференциального уравнения:

$$\frac{dN}{dt} = -\lambda N$$

которое означает, что число распадов dN , произошедшее за короткий интервал времени dt , пропорционально числу атомов N в образце. Поскольку временной интервал в 800 дней (3.42 года) является малым по сравнению с периодом полураспада, мы можем воспользоваться этим уравнением для решения задачи.

Постоянная распада (λ) связана с периодом полураспада следующим соотношением:

$$T_{\frac{1}{2}} = \frac{\ln 2}{\lambda}$$

тогда, $\lambda = 2 \times 10^{-10} \text{ лет}^{-1}$.

Подъемная сила 1 литра газообразного гелия составляет 1.115 г, следовательно чтобы поднять шар массой 10 г, необходимо 8.96 литра газа, что составляет 0.4 моль или ($0.4 \times 6.02 \times 10^{23} = 2.408 \times 10^{23}$ атомов гелия). Подставляем в уравнение для закона радиоактивного распада:

$$\frac{-2.408 \times 10^{23}}{3.42} = -2 \times 10^{-10} \times N$$

Решая уравнение, находим, что $N = 3.5 \times 10^{32}$, переходим к числу моль

$$\nu = \frac{3.5 \times 10^{32}}{6.02 \times 10^{23}} = 581\,395\,348 \text{ моль},$$

тогда масса ^{238}U составит 138 372 тонны.