ЗАДАНИЕ ПО КОМПЛЕКСУ ПРЕДМЕТОВ ФИЗИКА, ИНФОРМАТИКА, МАТЕМАТИКА

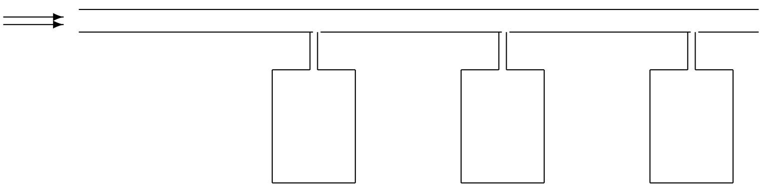
ВАРИАНТ 41091 для 9 класса

К 100-летнему юбилею плана ГОЭЛРО ветераны Колхоза имени Иоганна Штрауса высадили на высоком склоне холма живую надпись

ЗЕМЛЮ-КРАСАВИЦУ, РОДИНУ МИЛУЮ,
МЫ УКРЕПИМ ЭЛЕКТРИЧЕСКОЙ СИЛОЮ!

и с восходом солнца все жители поселка из своих ферм, домов и дворов могли любоваться лозунгом прежних лет.

Около каждого из 56 символов надписи (с учетом знаков препинания) установлен резервуар для полива. Все резервуары одинаковы и подсоединены друг за другом к одному водопроводу, как показано на рисунке.



Предположим, что в начальный момент времени начинает заполняться водой первый резервуар, и все они пусты. На каждом разветвлении по магистральному водопроводу уходит дальше $3/4$ подошедшего потока воды и $1/4$ отбирается к резервуару. Когда очередной резервуар наполняется, вода перестает поступать к нему и весь поток продолжает двигаться дальше по магистрали мимо полного резервуара. За последним резервуаром водопровод продолжается, и $3/4$ дошедшей до него воды продолжает двигаться дальше к иным объектам.

Пусть интенсивность подачи воды на вход магистрали 20 л/мин, объем каждого резервуара 200 л.

1. Найдите время, за которое заполнились бы все резервуары, если бы живая надпись состояла только из трех букв.

2. Найдите время T, за которое заполнятся все резервуары, установленные у надписи-лозунга, приведенного выше. Ответ запишите в часах, минутах и секундах, округлив его до целого числа секунд.

3. Определите интенсивность потока воды (в л/мин) на выходе водопровода (после последнего резервуара) в момент времени $T/2$.

РЕШЕНИЕ

1. Начнем со случая трех бассейнов. Процесс их заполнения состоит из трех этапов. Первый этап продолжается до заполнения первого бассейна, второй – до заполнения второго бассейна. Этапы отличаются друг от друга объемами воды, подаваемыми в каждый бассейн.

Обозначим интенсивность подачи воды в k-й бассейн через u_k, объем каждого бассейна через V ($V = 200$ л), интенсивность подачи воды в магистраль через u_0 ($u_0 = 20$ л/мин).

1.1. Согласно условию, до заполнения первого бассейна интенсивности заполнения каждого из них равны

$$u_1 = \frac{1}{4}u_0, \qquad u_2 = \frac{3}{4}\cdot\frac{1}{4}\,u_0 = \frac{3}{16}u_0, \qquad u_3 = \frac{3}{4}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{4}\,u_0 = \frac{9}{64}u_0.$$

Поскольку скорость заполнения и объем первого бассейна известны, можно найти время T_1, за которое он будет заполнен без остатка.

$$T_1 = \frac{V}{u_1} = \frac{4V}{u_0}.$$

За это время во второй и третий бассейны поступит воды соответственно

$$W_2 = T_1 \cdot u_2 = \frac{4V}{u_0}\cdot\frac{3}{16}u_0 = \frac{3}{4}\,V,$$

$$W_3 = T_1 \cdot u_3 = \frac{4V}{u_0}\cdot\frac{9}{64}u_0 = \frac{9}{16}\,V.$$

1.2. Начиная с момента времени T_1 распределение воды и ее интенсивность станут другими, а именно (сохраним для них те же обозначения)

$$u_1 = 0, \quad u_2 = \frac{1}{4}\,u_0, \quad u_3 = \frac{3}{4}\cdot\frac{1}{4}\,u_0 = \frac{3}{16}u_0.$$

Теперь можно найти время, за которое дозаполнится второй бассейн.

$$T_2 = \frac{V - W_2}{u_2} = \frac{V}{4}\cdot\frac{4}{u_0} = \frac{V}{u_0}.$$

За это время в третий бассейн добавится объем воды, равный $T_2 \cdot u_3$, после чего в нем станет воды (снова сохраним обозначение W_3)

$$W_3 = \frac{9}{16}\,V + \frac{V}{u_0}\cdot\frac{3}{16}u_0 = \frac{3}{4}\,V.$$

1.3. Остается дозаполнить третий бассейн. После момента времени T_2 интенсивность поспупления воды в него станет (обозначаем ее по-прежнему)

$$u_3 = \frac{1}{4}\,u_0.$$

Следовательно, время дозаполнения составит

$$T_3 = \frac{V - W_3}{u_3} = \frac{V}{4} \cdot \frac{4}{u_0} = \frac{V}{u_0}.$$

Таким образом, полное время наполнения всех трех бассейнов равно

$$T_1 + T_2 + T_3 = (4 + 1 + 1)\,\frac{V}{u_0} = \frac{6\,V}{u_0}.$$

Подставляя значения, получаем 60 минут.

2. Внимательное рассмотрение ситуации с тремя бассейнами позволяет описать процесс для произвольного их количества.

Пусть имеется n бассейнов. Тогда процесс будет идти в n этапов, каждый из которых будет заканчиваться заполнением очередного бассейна.

На первом этапе скорость заполнения k-го бассейна равна

$$u_k = \left(\frac{3}{4}\right)^{k-1} \cdot \frac{1}{4} \cdot u_0.$$

На втором этапе вода не поступает в первый бассейн, он "выбывает из игры", и его роль начинает играть второй бассейн. Роль второго играет третий бассейн и т.д. Другими словами, скорость заполнения 2-го бассейна будет равна u_1, скорость заполнения 3-го бассейна будет равна u_2, скорость заполнения k-го бассейна будет равна u_{k-1}.

На третьем этапе произойдет сдвиг еще на один номер (роль первого бассейна станет играть третий и т.д.), так что скорость заполнения k-го бассейна будет равна u_{k-2}.

В общем случае, на этапе j скорость заполнения k-го бассейна будет равна u_{k-j+1}. Заметим, что на любом этапе скорость заполнения первого еще недозаполненного бассейна равна u_1.

Обозначим (как и раньше) через W_k объем воды, уже имеющийся в k-м бассейне к началу этапа. Тогда продолжительность j-го этапа будет равна

$$T_j = \frac{V - W_j}{u_1}.$$

За это время в каждый последующий бассейн добавится объем воды $T_j \cdot u_{k-j+1}$ (где k – номер бассейна – принимает значения от j до n). Таким образом, после нахождения величины T_j необходимо пересчитать объемы

$$W_k = W_k + T_j \cdot u_{k-j+1}.$$

Перед началом расчета $W_k = 0$ для всех k от 1 до n.

Оформим описанные действия в виде алгоритма.

Алгоритм "Лозунг"

начало алгоритма

задать u_0

ДЛЯ k от 1 до n

  u[k] := $\left(\frac{3}{4}\right)^{k-1} \cdot \frac{1}{4} \cdot u_0$

  W[k] := 0

КОНЕЦ_ДЛЯ

$T0 := 0$

ДЛЯ j от 1 до n

  T[j] := (V - W[j]) / u[1]

  ДЛЯ k от j до n

    W[k] := W[k] + T[j] · u[k - j+1]

  КОНЕЦ_ДЛЯ

  T0 := T0 + T[j]

КОНЕЦ_ДЛЯ

Вывести T0

конец алгоритма

Запустив построенный алгоритм для $n = 56$, получим ответ на 2-й вопрос задания. Он составит $T = 590$ минут.

3. Для того, чтобы ответить на 3 вопрос, нужно прекратить вычисления, когда общее время $T0$ после прибавления очередного слагаемого станет больше, чем величина $T/2$ (где T – ответ на второй вопрос), т.е. больше, чем 295 минут.

Номер этапа, после которого произойдет прекращение вычислений, будет соответствовать количеству заполненных бассейнов. В течение этого этапа скорость (интенсивность) заполнения последнего бассейна (в который идет 1/4 дошедшей до него воды) будет в 3 раза меньше, чем интенсивность p потока воды, уходящего дальше по водопроводу. Если номер этапа равен j, то $p = 3\, u_{n-j+1}$.

Добавляя соответствующую строку в алгоритм, получаем, что в момент времени $T/2$ будут заполнены 26 бассейнов, а интенсивность потока воды за последним из них составит 0.0036 л/мин.

Ответы

1. 60 минут.
2. 9 часов 50 минут.
3. 0.0036 л/мин.

ЗАДАНИЕ ПО КОМПЛЕКСУ ПРЕДМЕТОВ
ФИЗИКА, ИНФОРМАТИКА, МАТЕМАТИКА

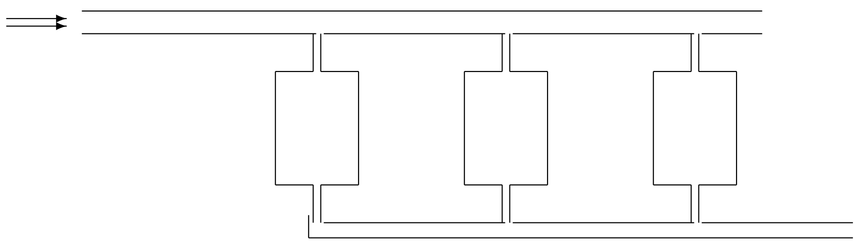
ВАРИАНТ 42091 для 9 класса

К 100-летнему юбилею плана ГОЭЛРО ветераны завода «Электрогамбургер» соорудили в заводском парке надпись

СОВЕТЫ И ЭЛЕКТРОФИКАЦИЯ ЕСТЬ ОСНОВА НОВОГО МИРА

Каждая из 41 букв надписи была оформлена в виде маленького бассейна с цветным дном, так что рабочие, и управляющие, и окрестные жители могли из своих окон любоваться лозунгом прежних лет.

Для наполнения водой был проведен водопровод, схема которого (для конструкции из трех бассейнов) показана на рисунке ниже.



На каждом разветвлении (включая посленюю букву) часть потока воды уходит дальше по магистральному водопроводу, а остальное идет к бассейну.

Каждый бассейн устроен таким образом, что пока он не заполнен, в него отбирается 1/3 дошедшего до него потока воды, и вся эта вода остается в нем. Как только бассейн заполняется, в него начинает отбираться 1/10 часть дошедшего до него потока воды, и вся эта вода свободно протекает через него (при этом объем воды в бассейне не изменяется).

Предположим, что в начальный момент времени (момент пуска воды) все бассейны пусты, интенсивность подачи воды на вход магистрали 50 л/мин, объем каждого бассейна 200 л.

1. Найдите время, за которое заполнились бы все бассейны, если бы их было только три.

2. Найдите время T, за которое заполнятся все буквы-бассейны надписи, приведенной выше. Ответ запишите в часах, минутах и секундах, округлив его до целого числа секунд.

3. Определите, какое количество букв-бассейнов будет заполнено в момент времени $T/2$.

РЕШЕНИЕ

1. Начнем со случая трех бассейнов. Процесс их заполнения состоит из трех этапов. Первый этап продолжается до заполнения первого бассейна, второй – до заполнения второго бассейна. Этапы отличаются друг от друга объемами воды, подаваемыми в каждый бассейн.

Обозначим интенсивность подачи воды в k-й бассейн через u_k, объем каждого бассейна через V ($V = 200$ л), интенсивность подачи воды в магистраль через u_0 ($u_0 = 50$ л/мин).

1.1. Согласно условию, до заполнения первого бассейна интенсивности заполнения каждого из них равны

$$u_1 = \frac{1}{3}u_0, \qquad u_2 = \frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\,u_0\right) = \frac{2}{9}u_0, \qquad u_3 = \frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3}\,u_0\right) = \frac{4}{27}u_0.$$

Поскольку скорость заполнения и объем первого бассейна известны, можно найти время T_1, за которое он будет заполнен без остатка.

$$T_1 = \frac{V}{u_1} = \frac{3V}{u_0}.$$

За это время во второй и третий бассейны поступит воды соответственно

$$W_2 = T_1 \cdot u_2 = \frac{3V}{u_0}\cdot\frac{2}{9}u_0 = \frac{2}{3}\,V,$$

$$W_3 = T_1 \cdot u_3 = \frac{3V}{u_0}\cdot\frac{4}{27}u_0 = \frac{4}{9}\,V.$$

1.2. Начиная с момента времени T_1 распределение воды и ее интенсивность станут другими, а именно (сохраним для них те же обозначения)

$$u_1 = \frac{1}{10}u_0, \quad u_2 = \frac{1}{3}\left(\frac{9}{10}\,u_0\right) = \frac{3}{10}u_0, \quad u_3 = \frac{1}{3}\left(\frac{9}{10}\cdot\frac{2}{3}\,u_0\right) = \frac{1}{5}u_0.$$

Теперь можно найти время, за которое дозаполнится второй бассейн.

$$T_2 = \frac{V - W_2}{u_2} = \frac{V\cdot 10}{3\cdot 3u_0} = \frac{10}{9}\frac{V}{u_0}.$$

За это время в третий бассейн добавится объем воды, равный $T_2 \cdot u_3$, после чего в нем станет воды (снова сохраним обозначение W_3)

$$W_3 = \frac{4}{9}V + \frac{10}{9}\frac{V}{u_0}\cdot\frac{1}{5}u_0 = \frac{2}{3}V.$$

1.3. Остается дозаполнить третий бассейн. После момента времени T_2 интенсивность поступления воды в него станет (обозначаем ее по-прежнему)

$$u_3 = \frac{1}{3}\left(\frac{9}{10}\right)^2 u_0 = \frac{27}{100}\,u_0.$$

Следовательно, время дозаполнения составит

$$T_3 = \frac{V - W_3}{u_3} = \frac{V \cdot 100}{3 \cdot 27 u_0} = \frac{100}{81}\frac{V}{u_0}.$$

Таким образом, полное время наполнения всех трех бассейнов равно

$$T_1 + T_2 + T_3 = \left(3 + \frac{10}{9} + \frac{100}{81}\right)\frac{V}{u_0} = \frac{433}{81}\frac{V}{u_0}.$$

Подставляя значения, получаем $21,38271...$ минут или (округляя до целого) 21 минута и 23 секунды.

2. Внимательное рассмотрение ситуации с тремя бассейнами позволяет описать процесс для произвольного их количества.

Пусть имеется n бассейнов. Тогда процесс будет идти в n этапов, каждый из которых будет заканчиваться заполнением очередного бассейна.

Рассмотрим j-й этап. Поскольку уже заполнено $(j-1)$ бассейнов), то на первых $(j-1)$ разветвлениях дальше по магистрали проходит по $\frac{9}{10}$ потока воды. На остальных (с j-го по n-й) далее проходит по $\frac{2}{3}$ потока воды. Поэтому интенсивность поступления воды в бассейны составит

$$u_k = \left(\frac{9}{10}\right)^{j-1} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{k-j} \cdot \frac{1}{3} \cdot u_0.$$

Здесь k (номер бассейна) принимает значения от j до n, так как бассейны с 1-го по $(j-1)$-й уже заполнены.

Обозначим (как и раньше) через W_k объем воды, уже имеющийся в k-м бассейне к началу этапа. Тогда продолжительность j-го этапа будет равна

$$T_j = \frac{V - W_j}{u_j}.$$

За это время в каждый последующий бассейн добавится объем воды $T_j \cdot u_k$ (где k (номер бассейна) также принимает значения от j до n). Таким образом, после нахождения величины T_j необходимо пересчитать объемы

$$W_k = W_k + T_j \cdot u_k.$$

Перед началом расчета $W_k = 0$ для всех k от 1 до n.

Оформим описанные действия в виде алгоритма (см. след. стр).

Алгоритм "Лозунг"
начало алгоритма

задать u_0

ДЛЯ k от 1 до n

    W[k] := 0

КОНЕЦ_ДЛЯ

$T0 := 0$

ДЛЯ j от 1 до n

    ДЛЯ k от j до n

        u[k] := $\left(\frac{9}{10}\right)^{j-1} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{k-j} \cdot \frac{1}{3} \cdot u_0$

    КОНЕЦ_ДЛЯ

    T[j] := (V - W[j]) / u[j]

    ДЛЯ k от j до n

        W[k] := W[k] + T[j] · u[k]

    КОНЕЦ_ДЛЯ

    T0 := T0 + T[j]

КОНЕЦ_ДЛЯ

Вывести T0

конец алгоритма

Запустив построенный алгоритм для $n = 41$, получим ответ на 2-й вопрос задания.

3. Для того, чтобы ответить на 3 вопрос, нужно прекратить вычисления, когда общее время $T0$ после прибавления очередного слагаемого станет больше, чем величина $T/2$ (где T – ответ на второй вопрос).

Останов расчетов в такой момент будет означать, что очередной (j-й) бассейн заполнился позже момента времени $T/2$, а предыдущий ($(j-1)$-й) был заполнен еще до наступления этого момента.

Добавляя соответствующую строку в алгоритм непосредственно после увеличения $T0$ и запуская его, получаем, что за половину всего времени будет заполнено доверху 34 бассейна.

Ответы (9 класс).

1. 21 минута и 23 секунды.
2. 44 часа 38 минут 12 секунд.
3. 34 бассейна.