# ЗАДАНИЕ ПО МАТЕМАТИКЕ

## Вариант 11101 для 10 класса

1. Выясните, существует ли натуральное число $n$, для которого найдутся натуральные числа $k_1$, $k_2$, $k_3$, $k_4$ такие, что

$$\left(1-\frac{1}{2}\right)^{k_1}\cdot\left(1-\frac{1}{3}\right)^{k_2}\cdot\left(1-\frac{1}{4}\right)^{k_3}\cdot\left(1-\frac{1}{5}\right)^{k_4}=(0,1)^n.$$

Если таких чисел $n$ несколько, то найдите показатели $k_1$, $k_2$, $k_3$, $k_4$ степени для каждого допустимого $n$.

2. Элементы A, B, C, D, E, F, G, H, I электрической схемы соединены проводниками AB, AD, AH, BC, BE, CD, CF, DI, EH, HI, FG. Робот должен обойти все проводники для поиска обрыва и вернуться в начало своего маршрута (один из элементов A, B,..., I). При этом некоторые проводники, возможно, придется пройти более одного раза. Найдите наименьшее достаточное для выполнения задачи робота количество пройденных им проводников. Есть ли проводники, которые необходимо проходить более одного раза, сколько их и каково количество повторений, какие это проводники?

3. Участок для строительства кафе ”Северный бриз” представляет собой криволинейный треугольник. Если провести для удобства координатные оси, то вдоль оси $OX$ он ограничен автодорогой, вдоль оси $OY$ — забором, а по линии $y=(x-a)^2$ проходит берег Ледовитого океана. Здесь $a>1$ — известный параметр. Кафе будет расположено на прямоугольной веранде, один из углов которой лежит на берегу моря, а противоположный совпадает с началом координат. Найдите координаты угла на берегу моря, для которых веранда будет иметь наименьший периметр.

4. Маяк расположен в море на расстоянии 500 м от прямолинейного берега. Вдоль кромки берега расположена стена длиной 40 м. Между маяком и берегом параллельно берегу со скоростью 5 м/с движется теплоход длиной 50 м. Он загораживает всю стену от смотрителя, находящегося на маяке, в течение 4 с. Найдите расстояние от теплохода до берега. (Шириной теплохода можно пренебречь.)

5. При каких целых $n$ число $n^4+2n^3-n^2-10n$ кратно 12?

Олимпиада школьников «Надежда энергетики». Отборочный этап

## ЗАДАНИЕ ПО МАТЕМАТИКЕ

### Вариант 12103 для 10 класса

1. В десятичной записи числа $M$ две цифры оказались пропущены. Они обозначены ниже подчеркиваниями.

$$M = 14! - 13! + 12! = 81\,43\_\,27\_\,000.$$

Можно ли восстановить эти цифры, не выполнив ни одного умножения? Либо найдите их указанным способом, либо покажите, что это сделать невозможно.

2. Решите систему уравнений

$$\begin{aligned} x^2 &= (y-z)^2 - 8, \\ y^2 &= (x-z)^2 - 16, \\ z^2 &= (x-y)^2 + 32. \end{aligned}$$

Для каждого решения $(x_k, y_k, z_k)$ найдите длину отрезка $AM_k$, где точки $A$ и $M_k$ имеют координаты $(1,2,3)$ и $(x_k, y_k, z_k)$.

3. Из множества $\{2, 4, 6, \ldots, 2n\}$ удалили одно число $X$, среднее арифметическое оставшихся чисел составило $76/3$. Найдите $n$ и $X$.

4. В трапецию можно вписать окружность. Докажите, что касаются друг друга окружности, построенные на боковых сторонах трапеции, как на диаметрах.

5. Выясните, существует ли функция $f(x) = a\cos^2 x + b\sin x$ такая, что при умножении любого из коэффициентов $a$, $b$ на число $k$ ($k \neq 0$, $k \neq 1$) получаются функции, не принимающие значений из множества $\{b, kb\}$. Ответ обоснуйте.

# ЗАДАНИЕ ПО МАТЕМАТИКЕ

## Вариант 13102 для 10 класса

1. Даны 2019 чисел, определяемых формулой $x_k = \dfrac{k}{2k+1}$. Докажите, что

$$\left(1 + \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_{2018}}{4}\right)^2 \geq x_1^2 + x_2^2 + \ldots x_{2018}^2.$$

2. Снежная королева собирается предложить пленнику свободу, если он нарисует такой 777-угольник, все стороны которого может пересечь одна единственная прямая, не проходящая через его вершины. Каковы шансы пленника? Либо нарисуйте такие 777-угольник и прямую, либо обоснуйте, что это сделать невозможно.

3. Автопарк компании "Куда в машинах снег везут?" имеет 7 снеговозов. При поломке первого или второго из них остальные шесть могут вывезти за совместный рейс 200 т снега. При поломке любого из оставшихся другие шесть могут вывезти за совместный рейс 220 т снега. Какова грузоподъемность каждого снеговоза?

4. Перед резиденцией Деда Мороза вдоль прямолинейной дорожки растет 99 елок, которые нужно нарядить к празднику. Если занумеровать их по порядку, то расстояние между елками с номером $k$ и с номером $k+1$ равно $k(k+1)+10$ метров. Где следует положить ящик с елочными украшениями, чтобы сумма расстояний от ящика до каждой елки была бы наименьшей?

5. На предновогодний парад прибыли снеговики двух видов: снеговики с морковкой и снеговики с редиской. При этом некоторые из них (и тех, и других) были с ведерками на голове. Оказалось, что снеговиков в ведерке и с морковкой больше, чем снеговиков без ведерка и с редиской. Каких снеговиков больше: с ведерком или с редиской?

# ЗАДАНИЕ ПО ФИЗИКЕ
# ВАРИАНТ 24103
# для 10-го класса

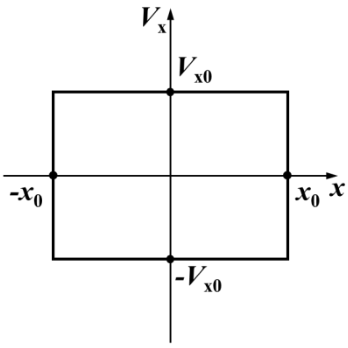
1. Что произойдёт с разностью потенциалов между пластинами плоского воздушного конденсатора, если одну из пластин заземлить? Объясните свой ответ.

2. Изучение нейтронных звезд превратилось в одну из самых увлекательных областей астрофизики. Интерес к ним обусловлен колоссальной плотностью и сильнейшими магнитными и гравитационными свойствами этих объектов Вселенной. Период обращения планеты нейтронной звезды вблизи поверхности $T$, а скорость движения по орбите $V$. Рассчитайте массу нейтронной звезды М.

3. Одноатомный идеальный газ расширяется по закону $pV^{2/3}$=const от объёма $V_1$ до объёма $V_2=kV_1$, $k$=8. Начальная внутренняя энергия газа равна $W_1$=2 Дж. Найдите изменение внутренней энергии газа.

4. Кубик, ребро которого равно $a$, плавает в воде, погрузившись в нее наполовину. Другой кубик такого же размера плавает в воде, погрузившись в нее на 3/4 своего объема. Кубики ставят друг на друга, соединив грани. Получившийся параллелепипед плавает в воде так, что его длинное ребро вертикально. Определите глубину погружения в воду нижней грани параллелепипеда, если первый кубик находится внизу. Найдите ответ, если внизу будет второй кубик.

5. Маленький шарик движется вдоль оси $Ox$. График зависимости проекции его скорости на ось $Ox$ от координаты $V_x(x)$ изображен на рисунке. Значения максимальной координаты шарика $x_0$ и максимальной проекции его скорости $V_{x0}$ известны. В момент времени $t_0$ = 0 шарик имеет значения координаты и проекции скорости: $x$<0, $V_x$<0. Найдите зависимости координаты шарика и проекции его скорости от времени. Постройте графики зависимостей $x(t)$, $V_x(t)$. Какой характерный параметр движения шарика вы можете еще определить?



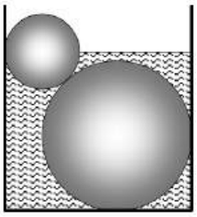
# ЗАДАНИЕ ПО ФИЗИКЕ
# ВАРИАНТ 22101
# для 10-го класса

1. Зеркальный шар освещается слева параллельным однородным световым пучком, диаметр которого равен диаметру шара. Ось пучка совпадает с горизонтальным диаметром шара. В каком направлении отразится больше световых лучей: налево или направо? Поясните ответ построением хода лучей.

2. На толстом резиновом жгуте массой $m$=200 г и жёсткостью $k$=100 Н/м подвешен груз массой $M$=900 г. Найдите удлинение жгута.

3. Кубик, находившийся в точке $A$, подтолкнули вверх по гладкой наклонной плоскости. В своём движении он дважды прошёл мимо точки $B$, находящейся на расстоянии $AB$=0,5 м от точки $A$: в момент $t_1$=0,2 с и в момент $t_2$=1 с (время отсчитывается от момента старта). Какой угол с горизонтом образует наклонная плоскость?

4. В однородном электрическом поле с напряженностью $\vec{E}$ из начала координат начинает движение частица массой $m$ и зарядом $Q$ так, что её координаты удовлетворяют системе уравнений: $\begin{cases} x = bt; \\ y = ct^2, \end{cases}$ где $b$ и $c$ – неизвестные постоянные. Определите работу, совершенную силами поля за первые τ секунд движения частицы в поле. Действием силы тяжести пренебречь. Решение поясните рисунком.



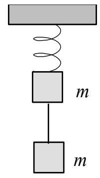
5. Два шара из одинакового материала радиусами $r$ и $2r$ поместили в цилиндрический сосуд диаметром $4{,}5r$ как показано на рисунке. В сосуд наливают жидкость плотностью ρ. Когда жидкость доходит до середины верхнего шара, нижний шар перестает давить на дно. С какой силой в этот момент верхний шар давит на нижний?

*Указание*: объем шара $V = \frac{4}{3}\pi R^3$, где $R$ – радиус шара.

ЗАДАНИЕ ПО ФИЗИКЕ

ВАРИАНТ 21101 для 10-го класса

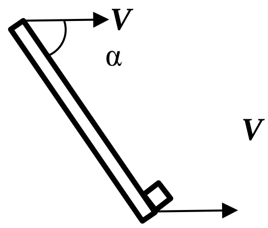
1. Возьмите два листа бумаги и расположите их вертикально и параллельно друг другу, оставив небольшой зазор. Подуйте между листами. Что произошло с листами? Почему?




2. Два одинаковых груза массой $m$ подвешены с помощью невесомой пружины жесткостью $k$ и нити. Каким будет максимальное перемещение вверх первого груза после пережигания нити? Нить невесома и нерастяжима.

3. Из кузова самосвала на землю высыпали песок так, что угол наклона поверхности песчаной горы равен $\alpha$. Определите коэффициент трения песчинок друг о друга.

4. Небольшой резиновый мячик начинает падать с края вертикального цилиндрического колодца диаметром $D$ и глубиной $H$ с идеально гладкими стенками. Начальная скорость мячика равна $v$ и направлена строго горизонтально по диаметру колодца. Сколько раз ударится мячик о стенки, прежде чем упадет на дно колодца? Удары о стенки считать абсолютно упругими.




5. По горизонтальному столу перемещают гладкую доску так, что скорость $V$ любой точки доски равна 100 см/с и направлена под углом $\alpha=60^o$ к доске (см. рисунок). Доска толкает впереди себя небольшой кубик массой $m$=100 г. В начальный момент кубик находится на краю доски. Через какое время кубик оторвётся от доски, если за это время на границе стол-кубик выделяется количество тепла $Q$=173 мДж? Коэффициент трения $\mu$ между кубиком и столом равен 0,2.

**ЗАДАНИЕ ПО ИНФОРМАТИКЕ**
**ВАРИАНТ 32101 для 10 класса**

*Для заданий 1-5 требуется разработать алгоритмы на языке блок-схем, псевдокоде или естественном языке*

1. Дана арифметическая прогрессия, члены которой выписаны в одну строку: 11213141…. Вывести $k$-ю цифру в получившейся строке.

2. Арифметический палиндром - положительное число, которое одинаково считывается слева направо и справа налево. Например, 87578 и 123321 это арифметические палиндромы, а 3753 и 81128 нет. Требуется найти количество способов представить число $N$ как сумму двух арифметических палиндромов. Решения, получаемые перестановкой слагаемых, считать одинаковыми.

3. В квадратной таблице размера $n \times n$ записаны целые числа. В таблице проведена диагональ из угла $(n, 1)$ в угол $(1, n)$. Найти минимум среди сумм модулей элементов диагоналей, параллельных проведённой диагонали таблицы.

4. На бумаге нарисована таблица размером $M \times N$ клеток. В клетке либо пусто, либо записано целое число. Среди чисел в таблице найти минимальное число, встречающееся в ней ровно 4 раза.

5. Берег водоема можно представить как прямой угол. Если расположить координатные оси декартовой плоскости по линиям берега, то водоем окажется в I четверти. В водоеме каждая рыба имеет координаты $(a, b)$. Также есть рыбаки, у каждого рыбака есть значение только координаты $x$ (значение координаты $y$ для всех рыбаков равно 0), у каждого рыбака есть удочка с заданной длиной $L$ (для всех рыбаков одинаковое значение). В зафиксированный момент времени рыбак может поймать рыбу на расстоянии меньшем либо равном $L$. Расстояние между рыбаком и рыбой можно найти по формуле $r = \sqrt{(a-x)^2 + b^2}$. Для каждого рыбака в зафиксированный момент времени определить, сколько рыбы он может поймать. Если рыба доступна сразу нескольким рыбакам, то она ловится первым из них (с наименьшим значением x).

**ЗАДАНИЕ ПО ИНФОРМАТИКЕ**
**ВАРИАНТ 31101 для 10 класса**

*Для заданий 1-4 требуется разработать алгоритмы на языке блок-схем, псевдокоде или естественном языке*

1. Разработать алгоритм для вычисления значения выражения $R = \sqrt{98 - \sqrt{95 + \sqrt{92 - \ldots - \sqrt{5 + \sqrt{2}}}}}$.

2. Как известно, числа-палиндромы – это числа, одинаково читающиеся слева направо и справа налево. Разработайте алгоритм для нахождения всех разбиений заданных чисел-палиндромов $n_1, n_2, \ldots, n_m$ на сумму трёх натуральных чисел $x$, $y$ и $z$ так, что $n_i = 3x_i + 5y_i + 2z_i$.

3. В прямоугольной таблице размера $m \times n$ записаны целые числа. Подсчитать число отрицательных простых (по модулю) чисел и число положительных составных чисел.

4. На бумаге нарисована таблица размером $M \times N$ клеток. В клетке либо пусто, либо записано целое число. Справа от таблицы есть пустая таблица размером $M \times N$ клеток. В правую таблицу надо записать все числа из исходной таблицы, расположив их в порядке убывания. Начинать с угла (1, 1), двигаясь вертикально. Пустые клетки расположить в начале таблицы по строкам.

5. Кощей Бессмертный заточил Василису Премудрую в башню и замуровал окно так, что если пущенная в окно стрела попадёт в заколдованное место, башня взорвётся, а если найдёт «пробел» в колдовской завесе, то она спадёт и Василиса будет свободна. Василиса тайно передала Ивану Царевичу формулу, по которой «навигатор» стрелы Ивана Царевича может вывести стрелу в точку любого из «пробелов» окна. Запишите эту логическую формулу, которая должна освободить Василису. Примечание: «пробелы» – это не закрашенные области на рисунке.