Олимпиада школьников «Надежда энергетики». Отборочный этап. Очная форма.

ЗАДАНИЕ ПО МАТЕМАТИКЕ
ВАРИАНТ 11103 для 10 класса

1. За год цены на энергоносители изменились по закону

$$y(a,x) = (a^4 - 2a - 12)(x^{16} + 12/x^2) + 2|x/a|,$$

где x — прежняя цена, y — новая цена, a — параметр, задаваемый товаропроизводителем. Могут ли при этом все цены, находившиеся в интервале $(12, 16)$, остаться в нём же?

2. Решите систему уравнений:

$$\begin{cases} 3x_1 = 2x_2^3 + 1,\ 3x_2 = 2x_3^3 + 1, \\ 3x_3 = 2x_4^3 + 1,\ 3x_4 = 2x_1^3 + 1. \end{cases}$$

3. Основанием призмы является треугольник ABC. Две его стороны имеют длины b и $b+2$, медиана к третьей стороне имеет длину $b-1$. Найдите площадь треугольника ABC и выясните, может ли его угол, образованный наиболее длинными сторонами, быть равным $45°$.

4. Целой частью $\lfloor x \rfloor$ числа x называется наибольшее целое число m такое, что $m \le x$, например, $\lfloor \sqrt{2} \rfloor = 1$, $\lfloor -0.9 \rfloor = -1$. Решите уравнение:

$$\lfloor \sqrt{x/2+3} \rfloor = \sqrt{\lfloor x/2+3 \rfloor}.$$

5. Решите в целых числах следующее уравнение:

$$-20x + 17y = 2017.$$

Олимпиада школьников «Надежда энергетики». Отборочный этап. Очная форма.

ЗАДАНИЕ ПО МАТЕМАТИКЕ
ВАРИАНТ 12102 для 10 класса

1. В офисе фирмы горят лампочки двух типов общей мощностью 3000 вт. Если бы все лампы были первого типа, то суммарная мощность увеличилась бы на 400 вт. Если бы все лампы были второго типа, то суммарная мощность стала бы равной 2040 вт. Найдите суммарную мощность ламп первого типа и суммарную мощность ламп второго типа.

2. Что больше:
$\underbrace{\sin(\sin(\ldots(\sin}_{17\text{ раз}}(\cos(17^\circ))\ldots)$ или $\underbrace{\sin(\sin(\ldots(\sin}_{2017\text{ раз}}(\cos(2017^\circ))\ldots)$?

3. Уравнение $x^2+b|x|+c=0$ имеет 4 попарно различных корня. Их произведение равно P, сумма модулей корней равна S. Найдите коэффициенты b и c и решите систему уравнений

$$\begin{cases} 2x+y=b, \\ x+2y=c^2. \end{cases}$$

4. Под куполом цирка n артистов идут с одинаковыми постоянными скоростями по канату. Навстречу им с такими же скоростями движутся еще n канатоходцев. При встрече лицом к лицу любых двух канатоходцев они пожимают друг другу руки, разворачиваются и движутся в противоположные стороны с прежней скоростью. Дойдя до какого-либо конца каната, артист покидает его и спускается. Может ли число всех рукопожатий на канате быть равным $n^3/2-1$?

5. Над плоским прямоугольным чемоданом с соотношением сторон $3:4$ проезжает прямоугольная рамка интровизора, которая имеет ширину H и достаточно большую длину (можно считать ее бесконечной). Взаимное положение чемодана и рамки таково, что продольная ось рамки всегда остается параллельной диагонали чемодана. При каком расстоянии между осью рамки и параллельной ей диагональю чемодана площадь, покрываемая рамкой, будет максимальна?

ЗАДАНИЕ ПО МАТЕМАТИКЕ
ВАРИАНТ 13102 для 10 класса

1. Техническое устройство состоит из трех агрегатов, их энергопотребление $E_1(\rho,t)=\sqrt{\rho^2-t+1}$, $E_2(\rho,t)=\sqrt{3\rho^2+2t-3}$, $E_3(\rho,t)=\sqrt{4\rho^2+t+1}$ зависит от плотности ρ и температуры t окружающей среды. Каково минимальное суммарное энергопотребление всех трех агрегатов и при каких значениях параметров ρ, t оно достигается?

2. Число $1/13$ разложили в бесконечную десятичную дробь. В ней вычеркнули 2018-ю цифру после запятой. Получили число x. Сравните $\sqrt[13]{x}$ и $\sqrt[13]{1/13}$.

3. Грани усеченной треугольной пирамиды требуется раскрасить так, что любые две смежные грани (т. е. имеющие хотя бы один общий отрезок) получают разные цвета.

А. Каково минимальное число цветов, достаточное для такой раскраски?

Б. Сколькими способами можно получить такую раскраску с минимальным числом цветов?

4. Два одинаковых генератора начали в разное время вырабатывать электроэнергию. В настоящий момент первый генератор выработал энергии в два раза больше, чем второй в момент t_0. В тот же момент t_0 первый выработал столько же электроэнергии, сколько второй в настоящий момент. Первый генератор в настоящий момент выработал энергии в k раз больше, чем второй. Найдите число k.

Если взять такие два шара, что объем одного в найденное число k раз больше другого, то каково отношение радиусов этих шаров?

5. Орнаментом в декоративно-прикладном искусстве принято называть повторяющееся изображение одного и того же рисунка. Орнамент на плоской поверхности (на стене, потолке, полу здания или помещения, на ткани, бумаге и пр.) часто образует "замощение" плоскости одинаковыми геометрическими фигурами. Можно ли "замостить" плоскость одинаковыми правильными 8-угольниками так, что любые два соседних 8-угольника имеют ровно одну общую сторону?

Олимпиада школьников «Надежда энергетики». Отборочный этап. Очная форма.

ЗАДАНИЕ ПО МАТЕМАТИКЕ
ВАРИАНТ 14103 для 10 класса

1. Через точку $O(0;0)$ проведены прямые, касающиеся параболы

$$y = (x-9)(x-16)$$

в точках A и B. Коробка для новогодних подарков имеет вид призмы с треугольником AOB в основании и высотой 1. Найдите объем коробки.

2. Решите уравнение

$$\left(1 - (\operatorname{tg}^2 x - 3)^3\right)\cos^2 3x = \cos^2 3x + \operatorname{tg}^2 x - 3.$$

3. Многочлен $f(x) = x^2 + px + q$ имеет корни $f(0)$ и $f(-1)$. Найдите все такие многочлены $f(x)$ и решите неравенство

$$\sqrt{f(x)} \leq \sqrt{x}.$$

4. Найдите наименьшее натуральное число n такое, что

$$\sin 2n^\circ = \sin 2017n^\circ.$$

5. В выпуклом 2018-угольнике $A_1A_2\ldots A_{2018}$ (не обязательно правильном) две стороны A_1A_2 и A_3A_4 продолжили до пересечения в точке B_2; то же сделали с парами сторон A_2A_3 и A_4A_5 (получили точку B_3), $\ldots$, $A_{2017}A_{2018}$ и A_1A_2 (получили точку B_{2018}), $A_{2018}A_1$ и A_2A_3 (получили точку B_1).

В итоге получилась "звёздочка" $A_1B_1A_2B_2A_3B_3A_4\ldots B_{2018}A_1$. Найдите сумму углов $B_1,\ B_2,\ \ldots\ ,\ B_{2018}$ этой "звёздочки".

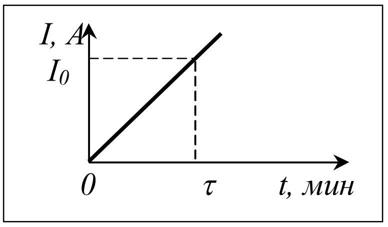
ЗАДАНИЕ ПО ФИЗИКЕ
ВАРИАНТ 21102 для 10-го класса

1. Нормальное ускорение частицы постоянно по модулю. Нарисуйте траекторию движения частицы, если проекция тангенциального ускорения на направление вектора скорости меньше нуля. Объясните рисунок.

2. Маленький тяжёлый шарик, подвешенный на лёгкой нерастяжимой нити, совершает колебания в вертикальной плоскости. В момент наибольшего отклонения шарика от положения равновесия его ускорение составляет $a=3g/5$, а максимальная высота, на которую поднимается шарик (если её отсчитывать от положения равновесия), составляет $h=20$ см. Определите длину нити.

3. Автомат производит n выстрелов в секунду и создаёт среднюю силу давления на плечо стрелка $F_{ср}$. Определите массу пули m, если её скорость при вылете из ствола равна v.

4. На горизонтальном столе лежит прямолинейный проводник массой m и длиной l. Линии однородного магнитного поля направлены горизонтально под углом α к проводнику. Ток в проводнике медленно изменяется по закону, приведённому на рисунке. В какой момент времени проводник начнёт двигаться? Модуль магнитной индукции равен B. Влиянием подводящих проводов пренебречь. Сделайте рисунок, на котором укажите все силы, действующие на проводник.



5. Петя и Катя, стоящие на расстоянии S друг от друга, одновременно бросили с одинаковыми начальными скоростями v_0 друг другу маленькие мячики и оба их поймали. Найдите минимальное расстояние, на котором были мячики в процессе полёта. Оба мячика бросаются с одной высоты и ловятся на одной высоте; точка броска «своего» мячика совпадает с точкой поимки «чужого»; сопротивлением воздуха пренебрегите.

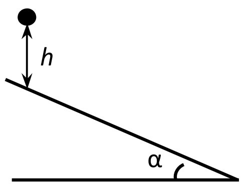
ЗАДАНИЕ ПО ФИЗИКЕ
ВАРИАНТ 22101 для 10-го класса

1. Когда мы снимаем свитер или джемпер, часто можно слышать треск, а в темноте - даже наблюдать искры. Объясните это явление с точки зрения физики. От чего, по вашему мнению, зависит интенсивность явления? Когда искры возникают чаще – летом или зимой; если под свитером шелковая рубашка или если свитер надет на голое тело? Объясните свой ответ.

2. На горизонтальной поверхности лежит длинная однородная доска. Для того, чтобы равномерно переместить доску по поверхности на расстояние, равное длине доски, необходимо совершить работу в два раза большую, чем для того, чтобы поставить её вертикально на торец. Найдите коэффициент трения между доской и поверхностью.

3. Паук-серебрянка тащит пузырек воздуха под воду. На глубине 10 см радиус пузырька составил 3 мм. Во сколько раз изменится масса паров воды в этом пузырьке, когда он погрузится на глубину 8 м? Вкладом сил поверхностного натяжения пренебречь, температуру воды считать неизменной.

4. Мячик падает без начальной скорости с высоты h на гладкую безграничную упругую наклонную плоскость, расположенную под углом α к горизонту (см. рис.). Определите, на какое максимальное расстояние удаляется мячик от наклонной плоскости в процессе «прыжков» по ней?



5. Три точечных заряда (модуль каждого равен q) расположены в вакууме в вершинах равнобедренного треугольника, длина основания которого a, а угол при вершине, противолежащей основанию, равен α. Заряды, расположенные в основании треугольника, имеют противоположные знаки. Найдите модуль силы, действующей на третий заряд.

ЗАДАНИЕ ПО ФИЗИКЕ
ВАРИАНТ 23101 для 10-го класса

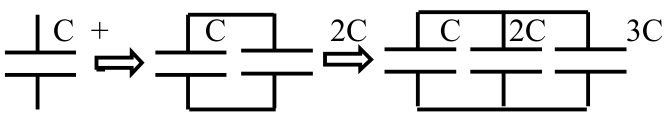
1. Теплый воздух, как известно, поднимается вверх. Почему на больших высотах держится постоянной очень низкая температура? Объясните свой ответ.

2. Маленький тяжёлый шарик, подвешенный на лёгкой нерастяжимой нити, совершает колебания в вертикальной плоскости. В момент прохождения положения равновесия ускорение шарика равно g. Определите ускорение шарика в момент его наибольшего отклонения от положения равновесия.

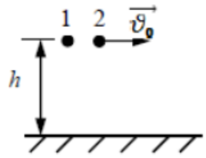
3. В баллоне вместимостью V = 8,31 л находится m = 15 мг молекулярного водорода при температуре T = 400 К. В результате некоторого воздействия на газ пятая часть его молекул диссоциировала на атомы. Определите давление газа в баллоне после диссоциации молекул. Молярная масса молекулярного водорода $M = 2$ г/моль. Температуру газа считать постоянной.

4. Две разноимённо заряженные частицы, импульсы которых равны $\vec{p}_1$ и $\vec{p}_2$, влетают в область пространства, в которой создано однородное электростатическое поле так, что их импульсы перпендикулярны друг другу. Через некоторое время импульс первой частицы изменяет своё направление на противоположное, а его модуль становится равным p_1. Определите импульс второй частицы в этот момент времени, если модули зарядов частиц одинаковы. Взаимодействием частиц пренебречь.

5. Параллельно заряженному конденсатору ёмкостью C присоединили незаряженный конденсатор ёмкостью $2C$ (см. рис.). При этом выделилось количество теплоты Q_1. Какое количество теплоты Q_2 выделится, если к конденсаторам параллельно присоединить третий ёмкостью $3C$?



ЗАДАНИЕ ПО ФИЗИКЕ
ВАРИАНТ 24104 для 10-го класса



1. Два тела 1 и 2 находятся на одинаковой высоте h в поле силы тяжести. Первое тело начинает падать без начальной скорости, а второму сообщают горизонтальную скорость v_0 . Какое тело раньше упадёт на Землю? Силой сопротивления воздуха пренебречь. Поясните свой ответ.

2. Уравнение траектории мяча имеет вид $y = x - kx^2$, где k – размерный коэффициент. Определите время подъема мяча на максимальную высоту.

3. Деревянный куб плавает в воде. Его плотность на 10% меньше плотности воды ($\rho_{воды}$=1000 кг/м^3) . Длина ребра куба равна 40 см. Какую минимальную работу надо совершить, чтобы полностью утопить куб? Ускорение свободного падения считать равным 10м/с^2. Работа силы сопротивления пренебрежимо мала.

4. Сосуд разделён на две равные части полупроницаемой перегородкой. В первой половине сосуда находится гелий в количестве 2ν моль. Во второй половине находится аргон в количестве ν моль. Известно, что через перегородку могут диффундировать только атомы гелия. Через достаточно большое время во второй части сосуда устанавливается давление $p_2^/$. Определите объём сосуда, если известно, что температура в сосуде всё время поддерживалась постоянной и равной T.

5. Два мячика брошены из одной точки так, что их импульсы $\vec{p}_1$ и $\vec{p}_2$ перпендикулярны друг другу. В некоторый момент времени импульс первого мячика становится равным $\vec{p}_1' = -\vec{p}_1$, а модуль импульса второго становится равным $p_2' = 5p_1$. Определите отношение модулей начальных импульсов, если масса второго мячика в два раза больше массы первого. Силой сопротивления воздуха можно пренебречь.

ЗАДАНИЕ ПО ИНФОРМАТИКЕ
ВАРИАНТ 33104 для 10 класса

Для заданий 1-5 требуется разработать алгоритмы на языке блок-схем, псевдокоде или естественном языке.

1. Среди простых чисел, не превосходящих заданного натурального числа n, найти такое, в девятеричной записи которого максимальное количество семёрок.
2. Задано n натуральных чисел, где $n \geq 10^6$, каждое число не превышает 200000. Вывести по возрастанию все числа, которые встречаются более одного раза.

3. При установке соединения между компьютерами A и B по протоколу TCP/IP используется так называемая «процедура рукопожатия»: 1) A выбирает натуральное число x, не большее 5988, и передает B значение функции $F(x)$, а B отвечает A числом $F(x + 1)$; 2) B выбирает натуральное число y, не большее 5988, и передает A число $F(y)$, при этом A отвечает B числом $F(y + 1)$. Значение функции F равно остатку от деления на 5989 значения аргумента, возведенного в третью степень. Составьте алгоритм для нахождения x и y, если при установке соединения последовательно наблюдались числа 1369,1421, 2795 и 2804. Число 5989 выбрано так, что значение аргумента определяется по значению функции F однозначно.

4. На координатной плоскости по оси ординат построено несколько параллелограммов (две стороны параллельны ординате). Необходимо подсчитать число точек с целочисленными координатами, принадлежащими сразу всем этим параллелограммам. Параллелограмм задается координатами вершин.

5. Подсчитать количество столбцов заданной матрицы, у которых все соседние элементы составлены из попарно различных чисел.
   Пример матрицы приведён на рис.

$$\begin{pmatrix}
a_{11} & \ldots & \ldots & & & a_{16} & \ldots & a_{18} \\
a_{21} & a_{22} & \ldots. & & & & a_{27} & \\
\ldots & & a_{33} & \ldots & & \ldots & & a_{38} \\
a_{41} & \ldots & & a_{44} & \ldots. & & & \\
& a_{52} & \ldots. & & a_{55} & \ldots. & & \\
& & a_{63} & & & a_{66} & \ldots. & \\
\ldots. & & & a_{74} & & & a_{77} & \\
a_{81} & \ldots. & & & a_{85} & & & a_{88}
\end{pmatrix}$$

Пример столбца:
(a_{11}, a_{21}, a_{31}, a_{41}, a_{51}, a_{61},a_{71},a_{81})

ЗАДАНИЕ ПО ИНФОРМАТИКЕ
ВАРИАНТ 32101 для 10 класса

Для заданий 1-5 требуется разработать алгоритмы на языке блок-схем, псевдокоде или естественном языке.

1. Найти сумму ряда чисел с точностью ε, $|x| \le 1$
$$\frac{x}{4} + \frac{1\cdot 5x^2}{4\cdot 8} + \frac{1\cdot 5\cdot 9x^3}{4\cdot 8\cdot 12} + \frac{1\cdot 5\cdot 9\cdot 13x^4}{4\cdot 8\cdot 12\cdot 16} + \cdots + \frac{1\cdot 5\cdot 9\cdot 13\cdot \cdots \cdot (4n-3)x^n}{4\cdot 8\cdot 12\cdot 16\cdot \cdots \cdot (4n)}$$

2. Автоморфным называют число, десятичная запись квадрата которого оканчивается цифрами самого этого числа. Найти произведение четных автоморфных чисел с порядковыми номерами от P до Q. Среди таких чисел найти все дружественные числа. Два числа называются дружественными, если каждое из них равно сумме всех делителей другого, кроме самого этого числа.

3. На координатной плоскости по линиям сетки построено несколько прямоугольников. Необходимо подсчитать число точек с целочисленными координатами, принадлежащими сразу всем этим прямоугольникам.

4. Рассмотрим возрастающий ряд всех положительных несократимых правильных дробей, знаменатель которых меньше или равен n. Разработайте алгоритм нахождения суммы P тех членов данного ряда, для которых знаменатель является совершенным числом. Число называется совершенным, если оно равно сумме всех своих делителей, исключая само это число.

5. Сопутствующие числа Пелля задаются соотношением:

$$P_n = \begin{cases} 2, n = 0 \\ 2, n = 1 \\ 2P_{n-1} + P_{n-2}, n > 1 \end{cases}$$. Разработайте алгоритм, находящий сопутствующие числа Пелля в диапазоне от P до Q, которые являются простыми.

ЗАДАНИЕ ПО ИНФОРМАТИКЕ
ВАРИАНТ 31101 для 10 класса

Для заданий 1-5 требуется разработать алгоритмы на языке блок-схем, псевдокоде или естественном языке.

1. В теории чисел нечётное натуральное число k называют числом Серпинского, если для любого натурального числа n число $k \times 2^n + 1$является составным. Разработайте алгоритм поиска чисел Серпинского для k=U в диапазоне для n от P до Q.

2. В теории чисел натуральное число называется B-гладким, если все его простые делители не превосходят B. Разработайте алгоритм проверки совершенных чисел в диапазоне от P до Q на B-гладкость. Число называют совершенным, если оно равно сумме всех своих делителей, исключая само число.

3. Разработайте алгоритм, который определяет, является ли заданная матрица H матрицей Адамара (квадратная матрица размера $n \times n$, составленная из чисел 1 и −1, для которой справедливо соотношение $H \times H^T = n * E_n$). Матрица – прямоугольная таблица. E_n – единичная матрица размера n (единичная матрица размера 3 E_3 приведена на рис. 1.). Символ T обозначает операцию транспонирования, т.е. $a_{ij}^T = a_{ji}$. Произведением матриц A размера (MxN) и B размера (NxQ) является матрица C размера (MxN), элементы которой определяются формулой $c_{ij} = \sum_{k=1}^{N} a_{ik} * b_{kj}$.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Рис. 1

4. В таблице размером MxN приведены значения величин N измерений силы тока для M амперметров. Найти для каждого прибора максимальное отклонение от среднего значения среди всех приборов.

5. Характеристикой строки целочисленной матрицы назовём сумму её отрицательных нечётных элементов. Переставляя строки матрицы, расположить их в соответствии с неубыванием характеристик. Матрица – прямоугольная таблица.