Олимпиада школьников «Надежда энергетики». Отборочный этап. Очная форма.

ЗАДАНИЕ ПО МАТЕМАТИКЕ
ВАРИАНТ 11102 для 10 класса

1. В одном теплоэнергетическом процессе температура зависит от некоторого параметра p по закону

$$T(p)=\frac{2p^4+13p^2+18}{(p^2+3)^2}.$$

С точки зрения безопасности важно, чтобы температура не поднималась выше известного порога. Найдите наибольшее значение функции $T(p)$ или докажите, что его не существует.

2. Кусок электрокабеля свернут и запаян в виде окружности диаметра d. На нем находятся клеммы A, B, C. Диаметр окружности, проходящий через точку C, перпендикулярен хорде AB и пересекает эту хорду в точке N. Расстояние между точкой N и центром окружности равно e.

1) Найдите суммарную длину хорд AB, AC и BC.

2) Над хордами монтируют диэлектрические листы, образующие боковую поверхность прямой призмы высоты h. Найдите площадь боковой поверхности призмы.

3. Числа $\sin^2\alpha$, $\cos\alpha$, $\operatorname{tg}^2\alpha$ являются первыми тремя членами геометрической прогрессии. Найдите эти числа и следующий член прогрессии.

4. Обозначим как

$$S_n(x_1,\ldots,x_n)=\frac{1}{n}\cdot(x_1+\cdots+x_n)$$

среднее арифметическое n чисел $x_1,\ldots,x_n$. Пусть $n\geq 2$ и $1\leq m<n$. Найдите числа $c_1,\ldots,c_m$ такие, что

$$S_n(x_1,\ldots,x_n)=S_m(x_1+\cdots+x_n+c_1,\ldots,x_1+\ldots+x_n+c_m).$$

Однозначно ли они определяются?

5. Целая часть $[x]$ действительного числа x — это наибольшее целое число m такое, что $m\leq x$, например, $[5/4]=1$, $[\pi]=3$, $[-3/4]=-1$, $[2]=2$. Решите уравнение с двумя неизвестными

$$\left[\frac{x+|x-y|}{2}\right]=y.$$

ЗАДАНИЕ ПО МАТЕМАТИКЕ
ВАРИАНТ 12103 для 10 класса

1. Найдите остаток от деления многочлена

$$x^{2020} - x^{1010} + x$$

на многочлен $x^2 - x$.

2. Для всех значений параметров a, b решите систему уравнений и найдите наименьший положительный корень обоих уравнений

$$\begin{cases} \sin x = -a\cos x, \\ \cos x = \quad b\sin x. \end{cases}$$

3. Артель из трех старателей намыла 10 кг золотого песка. Они считают, что первый должен получить 0,2 от доли остальных, второй – 0,3, а третий – 0,5 от доли остальных. Можно ли разделить песок указанным образом? Либо найдите соответствующие количества, либо докажите невозможность описанного дележа.

4. Дана равнобедренная трапеция $ABCD$ с основаниями $AD = a$ и $BC = 2a$. Длина боковой стороны равна $\sqrt{3}a$. Определите (и обоснуйте!), существует ли внутри трапеции точка O такая, что лучи OA, OB, OC и OD делят полный угол вокруг точки O на четыре равные части.

5. Пончик и Сиропчик привезли на пряничную дуэль два воза, на каждом из которых было по 2019 пряников. По условиям дуэли нужно по очереди съедать с любого воза любое количество пряников. Побежденным считается тот, кому нечего будет съесть. Начинает Пончик (так выпал жребий). Кто из коротышек может гарантированно победить? Опишите (и обоснуйте) его выигрышную пряничную стратегию.

ЗАДАНИЕ ПО МАТЕМАТИКЕ
ВАРИАНТ 13103 для 10 класса

1. Пренебрежение законами свободного рынка может делать бизнес неустойчивым и вести к разорению одного из участников. Так, нефтяная компания «Сверхжадность» вела дело следующим образом. Получив за месяц прибыль, компания увеличивала добычу и повышала цену, чтобы в следующем месяце получить еще бо́льшую прибыль. Однако спрос снижался, и компания терпела убытки (получала отрицательную прибыль). В следующtм за этим месяце компания сокращала добычу и снижала цену, спрос возрастал, и возрастала прибыль. В последующие два месяца аналогичный эффект повторялся. При этом прибыль в j-й месяц описывается формулой

$$a_j = (-1)^{j+2}(j+2), \quad j = 0, 1, 2, \ldots$$

Найдите суммарную прибыль $S_n = a_0 + a_1 + \cdots + a_n$ этой компании за n месяцев $(n = 0, 1, 2, \ldots)$.

2. Два стебелька водорослей дрейфуют по гладкой поверхности океана под действием ветра и течений. Один из них движется по кривой, задаваемой уравнением $x^2 + 2y + y^2 + 7/8 = 0$, другой — по кривой $x^2 + y^2 = 2x$. Найдите все возможные значения расстояния между этими стебельками. Могут ли они столкнуться?

3. Пусть $X(p)$ — множество всех корней уравнения

$$\operatorname{tg}^2 x = \frac{p^2}{\sin^2 x}.$$

Найдите все p, для которых множество $X(p)$ непусто и отлично от множества $X(0)$.

4. Из произвольной точки M, лежащей внутри угла с вершиной в точке A, опущены перпендикуляры MB и MC на стороны угла. Из точки A опущен перпендикуляр AK на отрезок BC. Докажите что $\angle BAK = \angle MAC$.

5. Докажите, что $\sqrt{\underbrace{444\ldots444}_{2020\text{ раз}} - \underbrace{888\ldots888}_{1010\text{ раз}}} = \underbrace{666\ldots666}_{1010\text{ раз}}$.