Вариант 17091 для 9 класса

Задача 1.

Если на педсовете Марья Ивановна сидит ВКонтакте, то Иван Ильич и Александра Варфоломеевна тоже сидят ВКонтакте. Этот факт директор знает давно. Также ему известно следующее. Только один из двух – Александра Варфоломеевна или Петр Петрович – сидит ВКонтакте. Хотя бы один из двух других – Ивана Ильича и Марьи Ивановны – сидит ВКонтакте. Также известно, что Петр Петрович и Иван Ильич либо оба сидят, либо оба не сидят ВКонтакте. Пользуясь только этими четырьмя верными утверждениями, директор без труда определяет, кто на педсовете сидит ВКонтакте. Сможете ли Вы? Не забудьте обосновать однозначность ответа.

Решение.

Будем использовать первые буквы имен для обозначения действующих лиц.

Первое условие допускает два варианта. Разберем их по очереди.

1. Пусть М сидит. Тогда И и А также сидят. Тогда из второго факта следует, что П не сидит. Получили противоречие с четвертым фактом, т.к. П и И не могут вести себя по-разному.

2. Убедимся, что второй вариант реализуем.

Итак, М не сидит (первый факт теперь ничего не дает). Но из третьего факта вытекает, что И сидит. Следовательно (четвертый факт), П также сидит. Наконец, второй факт дает, что А не сидит. Все утверждения проверены. Противоречий не возникло.

Ответ. ВКонтакте сидят Петр Петрович и Иван Ильич.

Задача 2.

Решите систему уравнений

$$\begin{cases} 2[x_1] & +x_2 & = 3/2, \\ 3[x_1] & -2x_2 & = 4. \end{cases}$$

Здесь $[a]$ означает целую часть числа a.

Решение.

Решая систему относительно неизвестных $[x_1]$ и x_2, находим

$$[x_1] = \frac{4+3}{7} = 1, \quad x_2 = \frac{9-16}{14} = -\frac{1}{2}.$$

Следовательно, x_1 может быть любым числом, целая часть которого равна 1.

Ответ: $x_1 \in [1;\ 2),\ x_2 = -1/2.$

Задача 3.

Две окружности пересекаются в точках P и Q. Через Q проведена прямая, перпендикулярная PQ, которая повторно пересекает окружности в точках A и B (причем точка Q лежит между A и B), а касательные к окружностям в этих точках пересекаются в точке C. Докажите, что отрезки AQ и CB видны из точки P под одинаковыми углами.

Решение. Случай 1. Точки A и B по разные стороны от Q.

По теореме об угле между касательной и хордой $\angle BAC = \angle QPA$.

Поскольку на отрезок PC опираются два прямых угла $\angle PAC$ и $\angle PBC$, то четырехугольник $APBC$ вписанный (рис.1).

Значит, $\angle BPC = \angle BAC = \angle QPA$, ч.т.д.

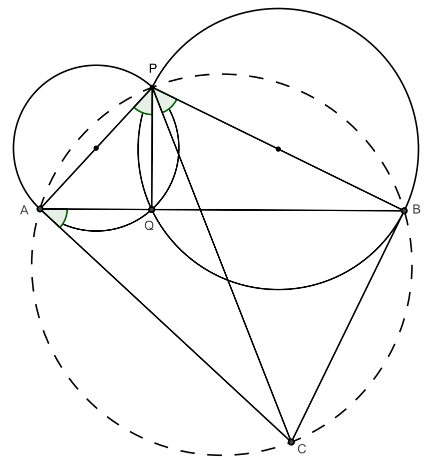

Рис.1.

Задача 4.

За два дня 100 банкиров собрали средства для борьбы с новым вирусом. Каждый из них внес однократно целое количество тысяч рублей, не превосходящее 200. При этом каждый взнос в первый день не превосходил 100 тысяч, а во второй был больше этой величины; и никакая пара из всех 100 взносов не отличалась ровно на 100 тысяч. Какую сумму собрали?

Решение существенно зависит от того, были ли все взносы различны или могли повторяться.

Пусть, сначала, все взносы различны. Любое натуральное число, большее 100, но не превосходящее 200, можно представить в виде $100 + n$, где $n \in [1, 2, 3, \ldots, 100]$. По условию нет двух чисел, отличающихся ровно на 100, а значит n принимает все оставшиеся от первых 50 чисел значения. Поэтому сумма всех 100 чисел равна $1 + 2 + 3 + \ldots + 100 + 100 \cdot 50 = 10050$.

Если взносы могли повторяться, то однозначного ответа дать невозможно, но можно произвести оценки. Заметим, что согласно условию в каждый день был хотя бы один взнос. Наименьшая сумма получится, если в первый день было 99 взносов по 1, а во второй день — один взнос 102 (101 быть не может). Суммарно получаем $99 \cdot 1 + 102 = 201$. Наибольшая сумма получится, если в первый день был 1 взнос, равный 99, а во второй день — 99 взносов по 200. Суммарно получаем $99 \cdot 200 + 99 = 19899$.

Ответ. Если все взносы различны, то собрали 10050 тысяч,
если нет, то минимально возможная сумма равна 201 тысяч, максимально возможная – 19899 тысяч.

Задача 5.

Необходимо построить дорогу, вымощенную бетонными плитами. Она пройдет в местности, где есть прямолинейный участок линии электропередач (ЛЭП) и завод по производству плит, находящийся на расстоянии d от ЛЭП ($d \neq 0$). Для ритмичной работы требуется, чтобы каждая точка строящейся дороги была одинаково удалена от завода и от ЛЭП.

А) Введите систему координат так, чтобы кирпичный завод имел координаты $(0, 0)$, а ЛЭП проходила через точку $(0, d)$ параллельно одной из координатных осей, и найдите координаты точки на дороге, удаленной от завода на расстояние $5d$.

Б) Для каких натуральных n на такой дороге существует точка, удаленная от завода на расстояние nd?

Решение.

Пусть ЛЭП проходит параллельно координатной оси OX. Тогда ей будет соответствовать прямая $y = d$. Заметим, что строящаяся дорога будет находиться ниже этой прямой, (в полуплоскости $y \leq d$).

А) Если $M(x, y)$ — искомая точка строящейся дороги, то расстояние до завода MO есть $\sqrt{x^2 + y^2}$. Это расстояние равно расстоянию между точкой M и ЛЭП, которое составляет $|y - d|$.

Согласно условию, $|y - d| = 5d$. Из двух решений полученного уравнения выбираем то, которое удовлетворяет условию $y \leq d$. Таким образом, $y = -4d$.

Осталось решить уравнение $\sqrt{x^2 + (-4d)^2} = 5d$.

Оно имеет два решения $x = \pm 3d$.

Б) Для поиска указанной точки сначала необходимо решить уравнение

$$|y - d| = 5d$$

при дополнительном условии $y \leq d$. Такое решение всегда существует и равно $-(n-1)d$. Далее получаем уравнение $\sqrt{x^2 + (n-1)^2 d^2} = nd$, которое имеет решение $x = \pm\sqrt{2n-1}d$ при любом натуральном n.

Ответ. А) две точки $(-3d, -4d)$, $(3d, -4d)$. Б) для любых натуральных n.