Вариант 17081 для 8 класса

Задача 1.

Если на педсовете Марья Ивановна сидит ВКонтакте, то Иван Ильич и Александра Варфоломеевна тоже сидят ВКонтакте. Этот факт директор знает давно. Также ему известно следующее. Только один из двух – Александра Варфоломеевна или Петр Петрович – сидит ВКонтакте. Хотя бы один из двух других – Ивана Ильича и Марьи Ивановны – сидит ВКонтакте. Также известно, что Петр Петрович и Иван Ильич либо оба сидят, либо оба не сидят ВКонтакте. Пользуясь только этими четырьмя верными утверждениями, директор без труда определяет, кто на педсовете сидит ВКонтакте. Сможете ли Вы? Не забудьте обосновать однозначность ответа.

Решение.

Будем использовать первые буквы имен для обозначения действующих лиц.

Первое условие допускает два варианта. Разберем их по очереди.

1. Пусть М сидит. Тогда И и А также сидят. Тогда из второго факта следует, что П не сидит. Получили противоречие с четвертым фактом, т.к. П и И не могут вести себя по-разному.

2. Убедимся, что второй вариант реализуем.

Итак, М не сидит (первый факт теперь ничего не дает). Но из третьего факта вытекает, что И сидит. Следовательно (четвертый факт), П также сидит. Наконец, второй факт дает, что А не сидит. Все утверждения проверены. Противоречий не возникло.

Ответ. ВКонтакте сидят Петр Петрович и Иван Ильич.

Задача 2.

Какой цифрой оканчивается значение суммы $2019^{2020} + 2020^{2019}$?

Решение.

Число 2019^n для $n \in \mathbb{N}$ оканчивается на 9, если n – нечетно, и на 1, если n – четно. Тогда 2019^{2020} оканчивается 1. Число 2020^n оканчивается на 0 для любого $n \in \mathbb{N}$, поэтому 2020^{2019} оканчивается 0. Тогда сумма $2019^{2020} + 2020^{2019}$ оканчивается цифрой 1.

Ответ. Цифрой 1.

Задача 3.

На координатной плоскости выделен квадрат K с вершинами в точках $(0, 0)$ и $(10, 10)$. Изобразите внутри этого квадрата множество M точек (x, y), координаты которых удовлетворяют уравнению

$$[x] < [y],$$

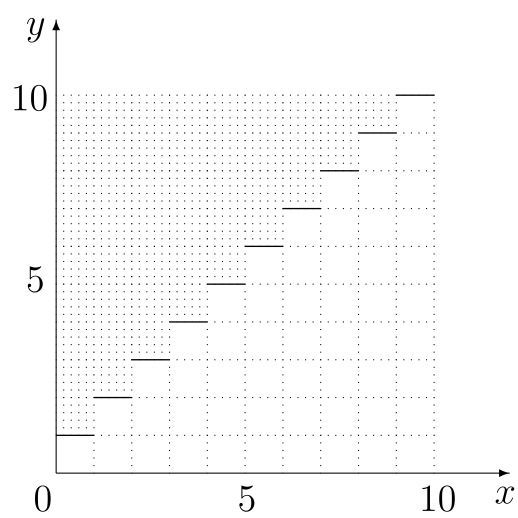
где $[a]$ обозначает целую часть числа a (то есть наибольшее целое число, не превосходящее a; например, $[10] = 10$, $[9,93] = 9$, $[1/9] = 0$, $[-1{,}7] = -2$). Какую часть площади квадрата K составляет площадь множества M?

Решение. Пусть $n \le x < n+1$, где n – целое число от 0 до 9. Тогда $[x] = n$ и $n < [y]$. Решением последнего неравенства являются все $y \ge n+1$. Таким образом, решением будет являться объединение полос

$$\{n \le x < n+1, n+1 \le y, \quad n \in \mathbb{Z}\}.$$

Внутрь заданного в условии квадрата попадет часть девяти таких полос. Если разбить квадрат K на 100 единичных квадратиков, то искомое множество M будет состоять из $9+8+7+\ldots+1 = 45$ таких квадратиков. Следовательно, отношение площадей равно $\dfrac{S_M}{S_K} = \dfrac{45}{100}$.

Ответ представлен точечной штриховкой на рисунке ниже (горизонтальные участки границы включены в M, вертикальные — нет). Площадь множества M составляет 45% площади квадрата K.



Задача 4.

За два дня 50 финансистов собрали средства для борьбы с новым вирусом. Каждый из них внес однократно целое количество тысяч рублей, не превосходящее 100. При этом каждый взнос в первый день не превосходил 50 тысяч, а во второй был больше этой величины; и никакая пара из всех 50 взносов не отличалась ровно на 50 тысяч. Какую сумму собрали?

Решение существенно зависит от того, были ли все взносы различны или могли повторяться.

Пусть, сначала, все взносы различны. Любое натуральное число, большее 50, но не превосходящее 100, можно представить в виде $50 + n$, где $n \in [1, 2, 3, \ldots, 50]$. По условию нет двух чисел, отличающихся ровно на 50, а значит n принимает все оставшиеся от первых 25 чисел значения. Поэтому сумма всех 50 чисел равна $1 + 2 + 3 + \ldots + 50 + 50 \cdot 25 = 2525$.

Если взносы могли повторяться, то однозначного ответа дать невозможно, но можно произвести оценки. Заметим, что согласно условию в каждый день был хотя бы один взнос. Наименьшая сумма получится, если в первый день было 49 взносов по 1, а во второй день — один взнос 52 (51 быть не может). Суммарно получаем $49 \cdot 1 + 52 = 101$. Наибольшая сумма получится, если в первый день был 1 взнос, равный 49, а во второй день — 49 взносов по 100. Суммарно получаем $49 \cdot 100 + 49 = 4949$.

Ответ. Если все взносы различны, то собрали 2525 тысяч,
если нет, то минимально возможная сумма равна 101 тысяч, максимально возможная – 4949 тысяч.

Задача 5.

Необходимо построить дорогу, вымощенную желтым кирпичом. Она пройдет в местности, где есть прямолинейный участок линии электропередач (ЛЭП) и кирпичный завод, находящийся на расстоянии d от ЛЭП ($d \neq 0$). Для ритмичной работы требуется, чтобы каждая точка строящейся дороги была одинаково удалена от завода и от ЛЭП. Введите систему координат так, чтобы кирпичный завод имел координаты $(0, 0)$, а ЛЭП проходила через точку $(0, d)$ параллельно одной из координатных осей. Найдите координаты точки на дороге, удаленной от завода на расстояние $5d$.

Решение.

Пусть ЛЭП проходит параллельно координатной оси OX. Тогда ей будет соответствовать прямая $y = d$. Заметим, что строящаяся дорога будет находиться ниже этой прямой, (в полуплоскости $y \leq d$).

Если $M(x, y)$ — искомая точка строящейся дороги, то расстояние до завода MO есть $\sqrt{x^2 + y^2}$. Это расстояние равно расстоянию между точкой M и ЛЭП, которое составляет $|y - d|$.

Согласно условию, $|y - d| = 5d$. Из двух решений полученного уравнения выбираем то, которое удовлетворяет условию $y \leq d$. Таким образом, $y = -4d$.

Осталось решить уравнение $\sqrt{x^2 + (-4d)^2} = 5d$.

Оно имеет два решения $x = \pm 3d$.

Ответ. Две точки $(-3d, -4d)$, $(3d, -4d)$.