Вариант 17071 для 7 класса

Задача 1.

Если на педсовете Марья Ивановна сидит ВКонтакте, то Иван Ильич и Александра Варфоломеевна тоже сидят ВКонтакте. Этот факт директор знает давно. Также ему известно следующее. Только один из двух – Александра Варфоломеевна или Петр Петрович – сидит ВКонтакте. Хотя бы один из двух других – Ивана Ильича и Марьи Ивановны – сидит ВКонтакте. Также известно, что Петр Петрович и Иван Ильич либо оба сидят, либо оба не сидят ВКонтакте. Пользуясь только этими четырьмя верными утверждениями, директор без труда определяет, кто на педсовете сидит ВКонтакте. Сможете ли Вы? Не забудьте обосновать однозначность ответа.

Решение.

Будем использовать первые буквы имен для обозначения действующих лиц.

Первое условие допускает два варианта. Разберем их по очереди.

1. Пусть М сидит. Тогда И и А также сидят. Тогда из второго факта следует, что П не сидит. Получили противоречие с четвертым фактом, т.к. П и И не могут вести себя по-разному.

2. Убедимся, что второй вариант реализуем.

Итак, М не сидит (первый факт теперь ничего не дает). Но из третьего факта вытекает, что И сидит. Следовательно (четвертый факт), П также сидит. Наконец, второй факт дает, что А не сидит. Все утверждения проверены. Противоречий не возникло.

Ответ. ВКонтакте сидят Петр Петрович и Иван Ильич.

Задача 2.

Какой цифрой оканчивается значение суммы $2019^{2020} + 2020^{2019}$?

Решение.

Число 2019^n для $n \in \mathbb{N}$ оканчивается на 9, если n – нечетно, и на 1, если n – четно. Тогда 2019^{2020} оканчивается 1. Число 2020^n оканчивается на 0 для любого $n \in \mathbb{N}$, поэтому 2020^{2019} оканчивается 0. Тогда сумма $2019^{2020} + 2020^{2019}$ оканчивается цифрой 1.

Ответ. Цифрой 1.

Задача 3.

На координатной плоскости выделен квадрат K с вершинами в точках $(0,0)$ и $(10,10)$. Изобразите внутри этого квадрата множество M точек (x,y), координаты которых удовлетворяют уравнению

$$[x] = [y],$$

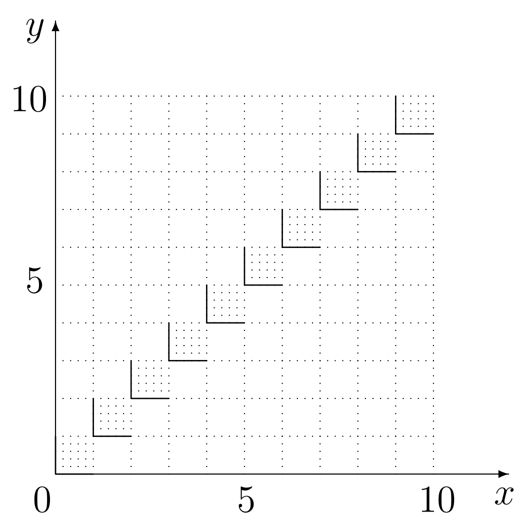
где $[a]$ обозначает целую часть числа a (то есть наибольшее целое число, не превосходящее a; например, $[10] = 10$, $[9,93] = 9$, $[1/9] = 0$, $[-1{,}7] = -2$). Какую часть площади квадрата K составляет площадь множества M?

Решение. Пусть $n \le x < n+1$, где n – целое число от 0 до 9. Тогда $[x] = n$ и $[y] = n$. Решением последнего уравнения являются все $y \in [n, n+1)$. Таким образом, решением будет являться объединение единичных квадратиков

$$\{x \in [n, n+1), y \in [n, n+1), \quad n \in \mathbb{Z}\}.$$

Внутрь заданного в условии квадрата K попадет десять таких квадратиков. Поскольку K состоит из 100 единичных квадратиков, то отношение площадей равно $\dfrac{S_M}{S_K} = \dfrac{10}{100} = 0{,}1 = 10\%$.

Ответ представлен точечной штриховкой на рисунке ниже (левые и нижние границы включены в M, правые и верхние — нет). Площадь множества M составляет 10% площади квадрата K.



Задача 4.

В современных условиях считается актуальной *цифровизация* — перевод всей информации в цифровой код. Каждой букве алфавита можно поставить в соответствие неотрицательно целое число, называемое *кодом буквы.* Тогда можно определить *вес слова* как сумму кодов всех букв данного слова. Можно ли закодировать буквы Е, О, С, Т, Ш, Ь элементарными кодами, состоящими каждый из одной цифры от 0 до 9 так, чтобы вес слова «СТО» был бы не меньше веса слова «ШЕСТЬСОТ»? Если такое кодирование возможно, то сколькими способами его можно осуществить? Если такое кодирование возможно, то допускает ли оно однозначное восстановление слова по его коду?

Решение.

Обозначим через $k(x)$ элементарный код буквы x. Имеем

$$k(C)+k(T)+k(O) \geq k(\text{Ш})+k(\text{Е})+k(C)+k(T)+k(\text{Ь})+k(C)+k(O)+k(T),$$

что равносильно

$$k(\text{Ш})+k(\text{Е})+k(C)+k(T)+k(\text{Ь})=0.$$

Таким образом,

$$k(\text{Ш})=k(\text{Е})=k(C)=k(T)=k(\text{Ь})=0.$$

Элементарный код $k(O)$ может быть любой цифрой от 0 до 9. Следовательно, имеется ровно 10 способов такого кодирования.

Однако при любом выборе $k(O)$ слова "ТОСТ" и "ТОТ" (например) будут иметь одинаковые коды $k(O)$, которые не могут быть декодированы.

Ответ. Неравенство для весов выполняется тогда и только тогда, когда $k(\text{Ш})=k(\text{Е})=k(C)=k(T)=k(\text{Ь})=0$.

Имеется ровно 10 способов такого кодирования.

При любом из них однозначное декодирование невозможно.

Задача 5.

За 10 минут Женя съедает 5 ватрушек с творогом, а Саша – только 3. В субботу все испеченные ватрушки достались Жене, а в воскресенье – Саше. При этом всего было съедено 70 ватрушек ровно за три часа чистого времени. Сколько ватрушек с творогом досталось каждому из детей?

Решение.

Пусть Жене досталось n, а Саше — k ватрушек. Нужно решить в целых числах систему

$$\begin{cases} n+k=70, \\ 2n+\frac{10}{3}k=180. \end{cases}$$

Подставляя $n=70-k$ во второе уравнение, получаем

$$140-2k+\frac{10}{3}k=180$$

или
$$\frac{4}{3}\,k = 40.$$
Отсюда $k = 30$, $n = 70 - 30 = 40$.

Ответ. Жене досталось 40 ватрушек, Саше — 30.