

Задача 1.

Охотник Пулька для своей собаки Бульки получил с «АлиЭкспресс» два куля корма. Наутро один куль оказался пуст. Незнайка взялся за расследование и выявил троих подозреваемых, которые заявили следующее.

Сиропчик сказал, что он не ел собачий корм.

Торопыжка заявил, что корм съел либо Пончик, либо Сиропчик.

Пончик же подтвердил, что Сиропчик корм не ел.

Как выяснилось позже, невинные сказали правду, а виновный солгал. Определите, кто же съел за ночь весь куль собачьего корма.

Решение.

Разберем по очереди три случая, в каждом из которых одно из утверждений ложно.

Случай 1. Врет Сиропчик.

В этом случае заявление Пончика также будет ложным, что противоречит условию.

Случай 2. Врет Торопыжка.

Это означает, что корм не ел ни Пончик, ни Сиропчик. Тогда они оба говорят правду, что соответствует условию.

Случай 3. Врет Пончик.

Тогда фраза Сиропчика также ложна, что противоречит условию.

Таким образом, только один из трех случаев (второй) не содержит противоречий. Следовательно, корм собачий съел Торопыжка.

Ответ. Весь куль собачьего корма съел Торопыжка.

Задача 2.

Какой цифрой оканчивается значение суммы $6^{2020} + 2019^{2020}$?

Решение.

Число 6 в любой степени оканчивается на 6.

Степень числа 9 оканчивается на 9, если эта степень нечетна, и на 1, если эта степень четна. Тогда 2019^{2020} оканчивается на 1.

Следовательно, сумма $6^{2020} + 2019^{2020}$ оканчивается цифрой 7.

Ответ. Цифрой 7.

Задача 3.

Квадратный лист бумаги сложили пополам, затем еще раз пополам и в третий раз пополам. В результате получился треугольник (см. рис. 1, на котором все линии сгибов проходят по пунктирным линиям). После этого сделали разрез по линии PQ и развернули лист. Будет ли отличаться форма получившейся фигуры от того, как был произведен первый сгиб: по линии MN или по линии AB ? Обоснуйте свой ответ и нарисуйте получившуюся фигуру (одну или две).

Решение.

Достаточно нарисовать два способа развертывания (свертывания) и убедиться, что различий не будет. Результат развертывания представлен справа (рис. 2).

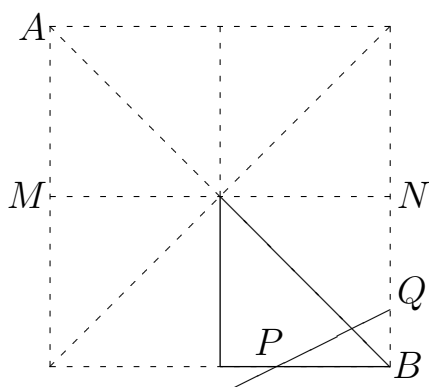


Рис. 1

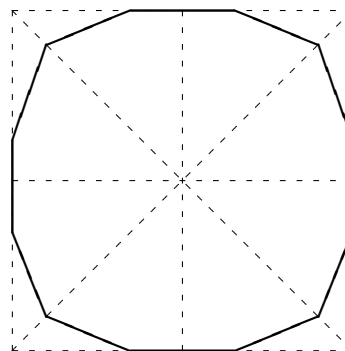


Рис. 2

Ответ. Различий не будет.

Задача 4.

В современных условиях считается актуальной *цифровизация* — перевод всей информации в цифровой код. Каждой букве алфавита можно поставить в соответствие неотрицательно целое число, называемое *кодом буквы*. Тогда можно определить *вес слова* как сумму кодов всех букв данного слова. Можно ли закодировать буквы О, П, С, Т, Ъ, Я элементарными кодами, состоящими каждый из одной цифры от 0 до 9 так, чтобы вес слова «СТО» был бы не меньше веса слова «ПЯТЬСОТ»? Если такое кодирование возможно, то сколькими способами его можно осуществить? Если такое кодирование возможно, то допускает ли оно однозначное восстановление слова по его коду?

Решение.

Обозначим через $k(x)$ элементарный код буквы x . Имеем:

$$k(C) + k(T) + k(O) \geq k(\Pi) + k(\text{Я}) + k(T) + k(\text{Б}) + k(C) + k(O) + k(T)$$

что равносильно

$$k(\Pi) + k(T) + k(\text{Б}) + k(\text{Я}) = 0,$$

откуда

$$k(\Pi) = k(T) = k(\text{Б}) = k(\text{Я}) = 0.$$

Элементарные коды двух оставшихся букв $k(C)$ и $k(O)$ могут быть любыми цифрами от 0 до 9. Следовательно, имеется ровно 10^2 способов такого кодирования. Однако при любом выборе $k(O)$ и $k(C)$ слова "ПОП" и "ТОТ" будут иметь одинаковые коды $k(O)$, которые не могут быть декодированы.

Ответ. Неравенство для весов выполняется тогда и только тогда, когда $k(\Pi) = k(T) = k(\text{Б}) = k(\text{Я}) = 0$.

Имеется ровно 100 способов такого кодирования.

При любом из них однозначное декодирование невозможно.

Задача 5.

За 10 минут Женя съедает 5 ватрушек с творогом, а Саша – только 3. В субботу все испеченные ватрушки достались Жене, а в воскресенье – Саше. При этом всего было съедено 35 ватрушек за полтора часа чистого времени. Сколько ватрушек с творогом досталось каждому из детей?

Решение.

Задача может быть решена составлением системы уравнений с двумя неизвестными (как аналогичная задача для 7 класса). Однако вряд ли учащиеся 6 класса пойдут по такому пути.

Альтернативный способ рассуждений может быть, например, таков.

Полтора часа — это 9 раз по 10 минут. Допустим, что дети ели десятиминутками. Пусть Саша потратил(а) x таких десятиминуток. Тогда Сашей съедено $3x$ ватрушек.

Следовательно, Женей съедено $35 - 3x$ ватрушек. Если каждый из детей потратил целое число десятиминуток, то величина $35 - 3x$ должна делиться на 5, откуда $3x$ должно делиться на 5.

Поскольку $x \leq 9$, то единственно возможный вариант $x = 5$. Таким образом, Сашей съедено $5 \cdot 3 = 15$ ватрушек, а Женей $35 - 15 = 20$.

Ответ. Жене досталось 20 ватрушек, Саше — 15.