Вариант 17101 для 10 класса

Задача 1.

Необходимо построить дорогу, вымощенную бетонными плитами. Она пройдет в местности, где есть прямолинейный участок линии электропередач (ЛЭП) и завод по производству плит, находящийся на расстоянии d от ЛЭП ($d \neq 0$). Для ритмичной работы требуется, чтобы каждая точка строящейся дороги была одинаково удалена от завода и от ЛЭП. Какой линией на плоскости описывается строящаяся дорога? Введите подходящую систему координат и найдите уравнение линии, описывающей дорогу, в этой системе координат; определите тип линии.

Решение.

Выберем прямоугольную систему координат XOY, завод бетонных плит поместим в начало O этой системы координат и направим ось OX вдоль ЛЭП. Пусть для определенности дорога проходит в полуплоскости $\{y \geq 0\}$. Тогда ЛЭП будет соответствовать прямая $y = d$.

Если $M(x, y)$ — точка строящейся дороги, то расстояние MO есть $\sqrt{x^2 + y^2}$, а расстояние между точкой M и ЛЭП равно $|y - d|$.

Приравняем квадраты этих расстояний:

$$x^2 + y^2 = |y - d|^2.$$

Отсюда получаем уравнение линии строящейся дороги:

$$y = \frac{d}{2} - \frac{1}{2d} \cdot x^2.$$

Это парабола.

Ответ: линия строящейся дороги есть парабола. Одно из возможных уравнений приведено выше.

Задача 2.

Найдите все значения вещественного параметра p, при которых разрешима система уравнений

$$\begin{cases} 2[x] & +y & = 3/2, \\ 3[x] & -2y & = p. \end{cases}$$

Здесь $[a]$ означает целую часть числа a.

Решение.

Решая систему относительно неизвестных $[x]$ и y, находим

$$[x] = \frac{p+3}{7}, \quad y = \frac{9}{14} - \frac{2p}{7}.$$

Остается выяснить, когда величина $\dfrac{p+3}{7}$ является целым числом.

Ответ. $p = 7k - 3$, $k \in \mathbb{Z}$.

Задача 3.

Две окружности пересекаются в точках P и Q. Через Q проведена прямая, перпендикулярная PQ, которая повторно пересекает окружности в точках A и B, а касательные к окружностям в этих точках пересекаются в точке C. Докажите, что отрезки AQ и CB видны из точки P под одинаковыми углами.

Решение. Случай 1. Точки A и B по разные стороны от Q.

По теореме об угле между касательной и хордой $\angle BAC = \angle QPA$.

Поскольку на отрезок PC опираются два прямых угла $\angle PAC$ и $\angle PBC$, то четырехугольник $APBC$ вписанный (рис.1).

Значит, $\angle BPC = \angle BAC = \angle QPA$, ч.т.д.

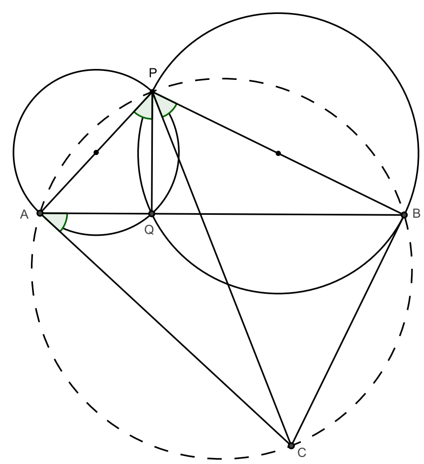

Рис.1.

Случай 2. Точки A и B по одну сторону от Q. Вновь применяя теорему об угле между касательной и хордой, получаем, что $\angle CAB = \angle APQ$ и $\angle CBQ = \pi - \angle QPB$. Следовательно, $\angle ACB = \angle APB$ и $\angle QPA = \angle BAC = \angle BPC$ (рис.2).

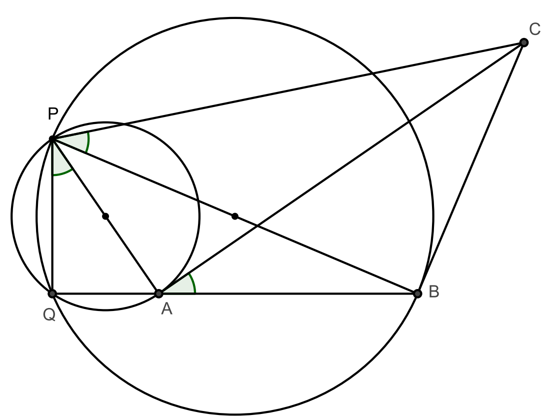

Рис.2.

Задача 4.

При проектировании некоторого технического устройства возникла необходимость решать уравнения

$$a \circ x = b,$$

где операция $\circ$ над двумя числами определена условием

$$y \circ z = \frac{y + z + |y - z|}{2}.$$

Найдите все числовые множества X такие, что для любых a, b из X указанное уравнение имеет единственный корень x и этот корень принадлежит множеству X.

Решение.

Заметим, что

$$y \circ z = \max\{y, z\}.$$

Далее, подходит любое одноэлементное множество

$$X = \{a\}, \quad a \in (-\infty; \infty)$$

так как $\max\{a, a\} = a$.

Допустим, что множество X содержит по крайней мере два различных элемента a и b. Не ограничивая общности, полагаем $a > b$. Для таких a и b уравнение (1) не имеет решения, так как $\max\{a, x\} \geq a$.

Ответ: в точности все одноэлементные множества $X = \{a\}$, $a \in (-\infty; \infty)$.

Задача 5.

Юный хакер желает изменить оценки в электронном журнале. Но при изменении одних оценок изменяются и другие, а именно: а) если он увеличивает на 2 количество пятерок, то при этом количество двоек уменьшается на 1; б) если он увеличивает на 1 количество пятерок, то количество двоек увеличивается на 2; в) если он уменьшает на 2 количество пятерок, то количество двоек увеличивается на 1; г) если он уменьшает на 1 количество пятерок, то количество двоек уменьшается на 2. Может ли он, совершая такие операции, превратить свои 3 пятерки и 30 двоек в 30 пятерок и 3 двойки?

Решение.

Обозначим через n_i $(i = 1, 2, 3, 4)$ количество действий каждого из четырех возможных типов. Требуется решить систему (первое уравнение соответствует изменению количества пятерок, второе – двоек)

$$\begin{cases} 2n_1 + n_2 - 2n_3 - n_4 = 30 - 3 = 27, \\ -n_1 + 2n_2 + n_3 - 2n_4 = 3 - 30 = -27. \end{cases}$$

Умножим второе уравнение на два и сложим с первым.

$$5n_2 - 5n_4 = -27$$

или

$$5(n_2 - n_4) = -27.$$

Согласно условию, величина $m = n_2 - n_4$ является целым числом. Однако уравнение $5m = -27$ не имеет решения в целых числах.

Ответ. Не может.