

## ЗАДАНИЕ ПО МАТЕМАТИКЕ

Вариант 17061 для 6 класса

### Задача 1.

Задано правило, по которому каждой паре целых чисел  $X$  и  $Y$  ставится в соответствие число  $X \nabla Y$ . (Значок « $\nabla$ » означает применение правила к числам  $X$  и  $Y$ .) Известно, что для любых целых чисел  $X, Y$  верны свойства  
1)  $X \nabla 0 = X$ , 2)  $X \nabla (Y - 1) = (X \nabla Y) - 2$  3)  $X \nabla (Y + 1) = (X \nabla Y) + 2$ .

Найдите формулу, которая описывает действие заданного правила, и решите уравнение

$$X \nabla X = -2019.$$

### Решение.

Начнем выписывать по порядку результат применения операции  $X \nabla Y$  при  $Y = 0, 1, 2, \dots$ , используя свойство 3.

$$X \nabla 0 = 0,$$

$$X \nabla 1 = X \nabla (0 + 1) = (X \nabla 0) + 2 = X + 2,$$

$$X \nabla 2 = X \nabla (1 + 1) = (X \nabla 1) + 2 = X + 4,$$

$$X \nabla 3 = X \nabla (2 + 1) = (X \nabla 2) + 2 = X + 6$$

и так далее. Видно, что результат можно вычислить по формуле  $x + 2y$ .

Аналогичное выписывание результатов применения операции  $X \nabla Y$  при  $Y = -1, -2, -3, \dots$  (используя свойство 2) также приводит к формуле  $x + 2y$ .

Остается решить уравнение

$$X \nabla X = X + 2X = 3X = -2019.$$

**Ответ.**  $X \nabla Y = X + 2Y$ , решение уравнения  $X = -673$

### Задача 2.

Что больше: сумма всех нечетных чисел от 1 по 2019 (включительно) или сумма всех четных чисел от 2 по 2018 (включительно)?

### Решение.

Запишем указанные суммы одну под другой

$$N = 1 + 3 + 5 + \dots + 2017 + 2019,$$

$$K = 2 + 4 + 6 + \dots + 2018.$$

Количество слагаемых во второй сумме равно  $2018/2 = 1009$ .

Видно, что каждое слагаемое второй суммы на единицу больше соответствующего слагаемого первой суммы (стоящего ровно на нем). Поэтому, чтобы из  $K$  получить  $N$  нужно 1009 раз вычесть единицу и затем прибавить слагаемое  $+2019$  (которому нет пары в сумме  $K$ ). Получаем

$$N = K - 1 \cdot 1009 + 2019 = K + 1010.$$

Таким образом,  $N > K$ .

**Ответ:** сумма нечетных больше.

### Задача 3.

Винтик и Шпунтик проектировали нановездеход. Винтик начертил прямоугольник и наметил в нем двадцать отверстий для колес. Шпунтик разделил прямоугольник на отсеки, начертив две линии, параллельные одной стороне прямоугольника, и еще две, параллельные другой. При этом ни одно отверстие Винтика не попало на линии Шпунтика. Докажите, что обязательно найдется отсек с тремя или более отверстиями.

### Решение.

Ясно, что 4 линии, попарно параллельные сторонам прямоугольника, разбивают его на 9 частей.

Если в каждой части будет не более двух отверстий, то всего их будет не более 18-ти, что противоречит условию.

### Задача 4.

В двух отделах лаборатории «Фантасмагория» разрабатывают мобильные приложения под Android и под iOS. В один из рабочих дней все сотрудники этих отделов обменялись некоторым количеством сообщений. При этом каждый разработчик из Android-отдела отправил по 7, а получил по 15 сообщений, а каждый разработчик из iOS-отдела отправил по 15, а получил по 9 сообщений. Сообщения могли быть отправлены как сотруднику своего, так и чужого отдела. В каком отделе работает больше сотрудников?

### Решение.

Пусть в Android-отделе работает  $n$ , а в iOS-отделе  $m$  человек. Вычислим общее количество сообщений двумя способами.

Было отправлено  $7n + 15m$  сообщений.

Было принято  $15n + 9m$  сообщений.

Тогда

$$7n + 15m = 15n + 9m,$$

откуда

$$6m = 8n.$$

Поскольку слева первый множитель меньше, то второй должен быть больше. Следовательно,  $m > n$ .

**Ответ:** в iOS-отделе больше человек.

### Задача 5.

Как-то раз Баба Яга и Кощей Бессмертный пытались поровну поделить чудесный порошок, который все обращает в золото. Баба Яга достала весы и взвесила весь порошок. Весы показали 6 золотников. Затем она стала убирать порошок, пока весы не показали 3 золотника. Однако Кощей заподозрил, что весы врут, и взвесил отдельно на тех же весах (других не было) отсыпанную часть порошка. Весы показали 2 золотника. Определите точный вес тех двух частей, на которые Баба Яга разделила порошок. Считайте, что если весы врут, то всегда на одну и ту же величину.

### Решение.

Обозначим через  $A$  вес первой части (той, что осталась на весах), через  $B$  вес второй части (той, что была отсыпана), через  $d$  ошибку весов.

Тогда результат первого взвешивания (всего порошка) дает

$$A + B + d = 6,$$

результат второго взвешивания (после отсыпания) дает

$$A + d = 3$$

и результат последнего взвешивания (отсыпанной части) дает

$$B + d = 2.$$

Складывая два последних равенства, получаем, что

$$A + B + 2d = 5.$$

Вычитая из полученного самое первое равенство, получаем

$$d = -1.$$

Таким образом, весы уменьшают все показания на 1 золотник. Отсюда сразу следует ответ.

**Ответ:** 4 и 3 золотника.