Олимпиада школьников «Надежда энергетики». Отборочный этап. Очная форма.

ЗАДАНИЕ ПО МАТЕМАТИКЕ
ВАРИАНТ 11991 для 9 класса

1. За год цены на энергоносители изменились по закону

$$y(a,x) = (a^3 - 1)\sqrt[3]{x^3+1} + \sqrt{a}\cdot x,$$

где x — прежняя цена, y — новая цена, a — параметр, задаваемый энергопроизводителем. Могут ли при этом все цены, находившиеся в интервале $(1, 30)$, остаться в нём же?

2. Решите систему уравнений:

$$\begin{cases} 2y = x^2 + 1, \\ 2z = y^2 + 1, \\ 2x = z^2 + 1. \end{cases}$$

3. Медиана AD треугольника ABC имеет длину m, стороны AB и AC — длины $m+1$ и $m+3$ соответственно. Найдите площадь треугольника ABC и выясните, может ли его угол A быть равным $30°$.

4. Целой частью $\lfloor x \rfloor$ числа x называется наибольшее целое число m такое, что $m \le x$, например, $\lfloor \sqrt{2} \rfloor = 1$, $\lfloor -0.9 \rfloor = -1$. Решите уравнение:

$$\lfloor \sqrt[3]{2x} \rfloor = \sqrt[3]{\lfloor 2x \rfloor}.$$

5. Имеется два одинаковых кубических ящика, каждый из которых заполнен шарами. Шары касаются друг друга, крайние шары касаются стенок, они уложены предельно плотно. В первом ящике 27 одинаковых больших шаров, во втором 64 одинаковых меньших. Шары в обоих ящиках состоят из одного вещества. Может ли какой-то ящик быть тяжелее другого, и если может, то насколько?

Для решения используйте формулу объёма шара радиуса R : $V = \frac{4}{3}\pi R^3$.

ЗАДАНИЕ ПО МАТЕМАТИКЕ
ВАРИАНТ 12993 для 9 класса

1. Горючее на складе хранится в бочках двух типов (разной емкости), их общий объем 800 м^3. Если бы все бочки были первого типа, то их общий объем стал бы на 200 м^3 больше. Если бы все бочки были второго типа, то общий объем сократился бы на 300 м^3. Каков суммарный объем бочек каждого типа?

2. Имеется два аккумулятора одинаковой емкости. На первом техническом устройстве аккумулятор разряжается за 40 ч работы, а на втором — за 60 ч. Аккумуляторы можно менять местами. Какое наибольшее время работы двух установок могут обеспечить два аккумулятора?

3. Сумма квадратов корней квадратного трехчлена $f(x) = x^2 + bx + c$ в 2,5 раза больше расстояния между ними, дискриминант равен 16. Найдите отношение большего из чисел $f(4)$ и $f(-4)$ к меньшему.

4. Под куполом цирка n артистов идут с одинаковыми постоянными скоростями по канату. Навстречу им с такими же скоростями движутся еще n канатоходцев. При встрече лицом к лицу любых двух канатоходцев они пожимают друг другу руки, разворачиваются и движутся в противоположные стороны с прежней скоростью. Дойдя до какого-либо конца каната, артист покидает его и спускается. Может ли число всех рукопожатий на канате быть равным $2n + 2$?

5. Андреевский флаг в виде синего креста, расположенного вдоль диагоналей белого прямоугольника с соотношением сторон $2 : 3$, является с 1992 г., как и в 1699 – 1917 годах, официальным военно-морским флагом России. (Он назван в честь апостола Андрея Первозванного, покровителя мореплавателей и рыбаков, распятого, по христианскому преданию, на косом кресте.) Толщина каждой перекладины синего креста в 10 раз меньше длины флага, а ось перекладины совпадает с диагональю флага. Найдите отношение площадей белых треугольников флага.

Олимпиада школьников «Надежда энергетики». Отборочный этап. Очная форма.

ЗАДАНИЕ ПО МАТЕМАТИКЕ
ВАРИАНТ 13993 для 9 класса

1. Техническое устройство состоит из трех агрегатов, их энергопотребление $E_1(\rho,t)=\sqrt{\rho-2t-1}$, $E_2(\rho,t)=\sqrt{2\rho+3t}$, $E_3(\rho,t)=\sqrt{3\rho+t-1}$ зависит от плотности ρ и температуры t окружающей среды. Каково минимальное суммарное энергопотребление всех трех агрегатов и при каких значениях параметров ρ, t оно достигается?

2. Число $1/11$ разложили в бесконечную десятичную дробь. В ней 2017-ю цифру после запятой заменили на 1700-ую. Получили число x. Сравните $\sqrt{x}$ и $\sqrt{1/11}$.

3. Точка E — центр квадрата $ABCD$. Она соединена отрезками со всеми вершинами квадрата кроме A. Требуется раскрасить точки A, B, C, D, E так, что любые две точки из этих пяти, соединенные отрезком, имеют разные цвета.

А. Каково минимальное число цветов, достаточное для такой раскраски?

Б. Сколько существует различных способов раскраски в минимальное число цветов?

4. В текущем году возраст брата вдвое больше возраста сестры в году t_0. В том году t_0 брату было столько же лет, сколько сестре в текущем. Найдите возраст брата и сестры в текущем году, если им вместе 21 год.

Пусть один прямоугольный треугольник имеет катеты, длины которых равны возрасту брата и сестры в текущем году, а у другого прямоугольного треугольника длины катетов равны возрастам брата и сестры в году t_0. Подобны ли эти треугольники?

5. Орнаментом в декоративно-прикладном искусстве принято называть повторяющееся изображение одного и того же рисунка. Орнамент на плоской поверхности (на стене, потолке, полу здания или помещения, на ткани, бумаге и пр.) часто образует "замощение" плоскости одинаковыми геометрическими фигурами. Можно ли "замостить" плоскость одинаковыми правильными 9-угольниками так, что любые два соседних 9-угольника имеют ровно одну общую сторону?

Олимпиада школьников «Надежда энергетики». Отборочный этап. Очная форма.

ЗАДАНИЕ ПО МАТЕМАТИКЕ
ВАРИАНТ 14994 для 9 класса

1. Через точку $O(0;0)$ проведены прямые, касающиеся параболы

$$y = 3(x-1)(x-4)$$

в точках A и B. Найдите площадь треугольника AOB.

2. Решите уравнение

$$x^4(1-(1-|1-x|)^7) = 1 + x^4 - |1-x|.$$

3. Многочлен $f(x) = x^2 + px + q$ имеет корни $f(0)$ и $f(2)$. Найдите все такие многочлены $f(x)$.

4. Зимний дворец (четвертый) в Петербурге возведен Франческо Бартоломео Растрелли в 1754–1762 гг. для императрицы Елизаветы Петровны. Суммарное число комнат и лестниц в нем на 169 меньше числа дверей, а суммарное число лестниц и дверей равно 1903. Если число дверей увеличить в 10 раз, то результат будет на 330 меньше числа комнат. Найдите количество лестниц, комнат и дверей.

5. В выпуклом 1111-угольнике $A_1A_2\ldots A_{1111}$ (не обязательно правильном) две стороны A_1A_2 и A_3A_4 продолжили до пересечения в точке B_2; то же сделали с парами сторон A_2A_3 и A_4A_5 (получили точку B_3), $\ldots$, $A_{1110}A_{1111}$ и A_1A_2 (получили точку B_{1111}), $A_{1111}A_1$ и A_2A_3 (получили точку B_1).

В итоге получилась "звёздочка" $A_1B_1A_2B_2A_3B_3A_4\ldots B_{1111}A_1$. Найдите сумму углов $B_1,\ B_2,\ \ldots\ ,\ B_{1111}$ этой "звёздочки".