Олимпиада школьников «Надежда энергетики». Отборочный этап. Очная форма.

ЗАДАНИЕ ПО МАТЕМАТИКЕ
ВАРИАНТ 11103 для 10 класса

1. За год цены на энергоносители изменились по закону

$$y(a, x) = (a^4 - 2a - 12)(x^{16} + 12/x^2) + 2|x/a|,$$

где x — прежняя цена, y — новая цена, a — параметр, задаваемый товаропроизводителем. Могут ли при этом все цены, находившиеся в интервале $(12, 16)$, остаться в нём же?

2. Решите систему уравнений:

$$\begin{cases} 3x_1 = 2x_2^3 + 1,\ 3x_2 = 2x_3^3 + 1, \\ 3x_3 = 2x_4^3 + 1,\ 3x_4 = 2x_1^3 + 1. \end{cases}$$

3. Основанием призмы является треугольник ABC. Две его стороны имеют длины b и $b + 2$, медиана к третьей стороне имеет длину $b - 1$. Найдите площадь треугольника ABC и выясните, может ли его угол, образованный наиболее длинными сторонами, быть равным $45°$.

4. Целой частью $\lfloor x \rfloor$ числа x называется наибольшее целое число m такое, что $m \le x$, например, $\lfloor \sqrt{2} \rfloor = 1$, $\lfloor -0.9 \rfloor = -1$. Решите уравнение:

$$\lfloor \sqrt{x/2 + 3} \rfloor = \sqrt{\lfloor x/2 + 3 \rfloor}.$$

5. Решите в целых числах следующее уравнение:

$$-20x + 17y = 2017.$$

Олимпиада школьников «Надежда энергетики». Отборочный этап. Очная форма.

ЗАДАНИЕ ПО МАТЕМАТИКЕ
ВАРИАНТ 12102 для 10 класса

1. В офисе фирмы горят лампочки двух типов общей мощностью 3000 вт. Если бы все лампы были первого типа, то суммарная мощность увеличилась бы на 400 вт. Если бы все лампы были второго типа, то суммарная мощность стала бы равной 2040 вт. Найдите суммарную мощность ламп первого типа и суммарную мощность ламп второго типа.

2. Что больше:
$\underbrace{\sin(\sin(\ldots(\sin}_{17\ \text{раз}}(\cos(17^\circ))\ldots)$ или $\underbrace{\sin(\sin(\ldots(\sin}_{2017\ \text{раз}}(\cos(2017^\circ))\ldots)$?

3. Уравнение $x^2+b|x|+c=0$ имеет 4 попарно различных корня. Их произведение равно P, сумма модулей корней равна S. Найдите коэффициенты b и c и решите систему уравнений

$$\begin{cases} 2x+y=b, \\ x+2y=c^2. \end{cases}$$

4. Под куполом цирка n артистов идут с одинаковыми постоянными скоростями по канату. Навстречу им с такими же скоростями движутся еще n канатоходцев. При встрече лицом к лицу любых двух канатоходцев они пожимают друг другу руки, разворачиваются и движутся в противоположные стороны с прежней скоростью. Дойдя до какого-либо конца каната, артист покидает его и спускается. Может ли число всех рукопожатий на канате быть равным $n^3/2-1$?

5. Над плоским прямоугольным чемоданом с соотношением сторон $3:4$ проезжает прямоугольная рамка интровизора, которая имеет ширину H и достаточно большую длину (можно считать ее бесконечной). Взаимное положение чемодана и рамки таково, что продольная ось рамки всегда остается параллельной диагонали чемодана. При каком расстоянии между осью рамки и параллельной ей диагональю чемодана площадь, покрываемая рамкой, будет максимальна?

Олимпиада школьников «Надежда энергетики». Отборочный этап. Очная форма.

ЗАДАНИЕ ПО МАТЕМАТИКЕ
ВАРИАНТ 13102 для 10 класса

1. Техническое устройство состоит из трех агрегатов, их энергопотребление $E_1(\rho, t) = \sqrt{\rho^2 - t + 1}$, $E_2(\rho, t) = \sqrt{3\rho^2 + 2t - 3}$, $E_3(\rho, t) = \sqrt{4\rho^2 + t + 1}$ зависит от плотности ρ и температуры t окружающей среды. Каково минимальное суммарное энергопотребление всех трех агрегатов и при каких значениях параметров ρ, t оно достигается?

2. Число 1/13 разложили в бесконечную десятичную дробь. В ней вычеркнули 2018-ю цифру после запятой. Получили число x. Сравните $\sqrt[13]{x}$ и $\sqrt[13]{1/13}$.

3. Грани усеченной треугольной пирамиды требуется раскрасить так, что любые две смежные грани (т. е. имеющие хотя бы один общий отрезок) получают разные цвета.

А. Каково минимальное число цветов, достаточное для такой раскраски?

Б. Сколькими способами можно получить такую раскраску с минимальным числом цветов?

4. Два одинаковых генератора начали в разное время вырабатывать электроэнергию. В настоящий момент первый генератор выработал энергии в два раза больше, чем второй в момент t_0. В тот же момент t_0 первый выработал столько же электроэнергии, сколько второй в настоящий момент. Первый генератор в настоящий момент выработал энергии в k раз больше, чем второй. Найдите число k.

Если взять такие два шара, что объем одного в найденное число k раз больше другого, то каково отношение радиусов этих шаров?

5. Орнаментом в декоративно-прикладном искусстве принято называть повторяющееся изображение одного и того же рисунка. Орнамент на плоской поверхности (на стене, потолке, полу здания или помещения, на ткани, бумаге и пр.) часто образует "замощение" плоскости одинаковыми геометрическими фигурами. Можно ли "замостить" плоскость одинаковыми правильными 8-угольниками так, что любые два соседних 8-угольника имеют ровно одну общую сторону?

Олимпиада школьников «Надежда энергетики». Отборочный этап. Очная форма.

ЗАДАНИЕ ПО МАТЕМАТИКЕ
ВАРИАНТ 14103 для 10 класса

1. Через точку $O(0;0)$ проведены прямые, касающиеся параболы

$$y = (x-9)(x-16)$$

в точках A и B. Коробка для новогодних подарков имеет вид призмы с треугольником AOB в основании и высотой 1. Найдите объем коробки.

2. Решите уравнение

$$\left(1-(\operatorname{tg}^2 x-3)^3\right)\cos^2 3x = \cos^2 3x + \operatorname{tg}^2 x - 3.$$

3. Многочлен $f(x) = x^2 + px + q$ имеет корни $f(0)$ и $f(-1)$. Найдите все такие многочлены $f(x)$ и решите неравенство

$$\sqrt{f(x)} \leq \sqrt{x}.$$

4. Найдите наименьшее натуральное число n такое, что

$$\sin 2n^\circ = \sin 2017n^\circ.$$

5. В выпуклом 2018-угольнике $A_1A_2\ldots A_{2018}$ (не обязательно правильном) две стороны A_1A_2 и A_3A_4 продолжили до пересечения в точке B_2; то же сделали с парами сторон A_2A_3 и A_4A_5 (получили точку B_3), … , $A_{2017}A_{2018}$ и A_1A_2 (получили точку B_{2018}), $A_{2018}A_1$ и A_2A_3 (получили точку B_1).

В итоге получилась "звёздочка" $A_1B_1A_2B_2A_3B_3A_4\ldots B_{2018}A_1$. Найдите сумму углов $B_1,\ B_2,\ \ldots,\ B_{2018}$ этой "звёздочки".