ЗАДАЧА 8 (ДЛЯ 9 КЛАССА). Уравнение $x^2 + b|x| + c = 0$ имеет 4 попарно различных корня. Их произведение равно P, сумма модулей корней равна S. Найдите коэффициенты b и c.

РЕШЕНИЕ. Пусть $x_1, \ldots, x_4$ — корни исходного уравнения, положим $y = |x|$. Тогда исходное уравнение становится квадратным: $y^2 + by + c = 0$. Последнее имеет два положительных корня y_1, y_2, где $y_2 > y_1 > 0$, и дискриминант $D = b^2 - 4c > 0$. Пусть $x_1 = -y_1, \quad x_2 = y_1, \quad x_3 = -y_2, \quad x_4 = y_2$. Тогда по условию имеем $S = |x_1| + |x_2| + |x_3| + |x_4| = 2(y_1 + y_2) = 2(-b)$ и, следовательно, $b = -S/2$.

В силу другого условия задачи имеем

$$P = x_1 x_2 x_3 x_4 = -y_1^2(-y_2^2) = (y_1 y_2)^2 = c^2.$$

Очевидно, $S > 0$ и, следовательно, $b < 0$. Из условия $y_1 = (-b - \sqrt{D})/2 > 0$ получаем $\sqrt{b^2 - 4c} < -b$. С учетом положительности $-b$, возведя обе части последнего нер-ва в квадрат, приходим к нер-ву $b^2 - 4c < b^2$, откуда $c > 0$. Таким образом, $b = -S/2, \quad c = \sqrt{P}$.

ОТВЕТ. $b = -S/2,\ c = \sqrt{P}$.

ЗАДАЧА 12 (ДЛЯ 9 КЛАССА). Зимний дворец (четвертый) в Петербурге возведен Франческо Бартоломео Растрелли в 1754–1762 гг. для императрицы Елизаветы Петровны. Окон в нем на 1828 больше, чем лестниц, а комнат и лестниц вместе 1617. Если число лестниц увеличить в 10 раз, то результат будет на 775 меньше числа окон. Найдите количество комнат, окон и лестниц.

РЕШЕНИЕ. Пусть x, y, z — число окон, комнат и лестниц соответственно. Тогда условия задачи описываются уравнениями

$$x - z = 1828, \ (1) \qquad y + z = 1617, \ (2) \qquad x - 10z = 775. \ (3)$$

Вычитая (3) из (1), получим уравнение с одним неизвестным $9z = 1053$. Из него находим $z = 117$. Тогда из (1) получаем $x = 1828 + z = 1945$ и из (2) находим $y = 1617 - z = 1500$.

ОТВЕТ: 1500 комнат, 1945 окон, 117 лестниц.

ЗАДАЧА 15 (ДЛЯ 9 КЛАССА). В выпуклом 1010-угольнике $A_1A_2\dots A_{1010}$ стороны A_1A_2 и A_3A_4 продолжили до пересечения в точке B_2; то же сделали с парами сторон A_2A_3 и A_4A_5 (получили точку B_3), ... , $A_{1009}A_{1010}$ и A_1A_2 (получили точку B_{1010}), $A_{1010}A_1$ и A_2A_3 (получили точку B_1).

В итоге образовалась "звёздочка" $A_1B_1A_2B_2A_3B_3A_4\dots B_{1010}A_1$. Найдите сумму углов $B_1,\ B_2,\ \dots\ ,\ B_{1010}$ этой "звёздочки".

РЕШЕНИЕ. Сумма всех внутренних углов n-угольника равна $S=(n-2)\cdot 180°$. В нашем случае $n=1010$.

Для всех смежных углов имеем $\sum\limits_i \angle B_iA_iA_{i+1}=\sum\limits_i(180°-\angle A_{i-1}A_iA_{i+1})=$ $=n\cdot 180°-S=n\cdot 180°-(n-2)\cdot 180°=360°$ (индексы слагаемых должны учитывать цикличность нумерации: $A_{n+1}=A_1$). Аналогично, сумма $\angle B_1A_2A_1+$ $+\angle B_2A_3A_2+\dots$ тоже равна $360°$. Сумма всех углов треугольников $\triangle B_1A_1A_2$, $\triangle B_2A_2A_3$, $\dots$, равна, очевидно, $n\cdot 180°$. Значит, искомая сумма углов равна $n\cdot 180°-2\cdot 360°=(n-4)\cdot 180°=1006\pi$.

ОТВЕТ: 1006π ($181\,080°$).

ЗАДАЧА 16 (ДЛЯ 9 КЛАССА). В некоторой области для обеспечения электричеством удаленных районов работают гидрогенераторы двух типов, суммарной мощностью 7000 кВт. Если бы все генераторы были первого типа, то суммарная мощность была бы на 1000 кВт больше. Если бы все генераторы были второго типа, то суммарная мощность была бы на 3000 кВт меньше. Какова суммарная мощность генераторов каждого типа?

РЕШЕНИЕ. Пусть имеется m генераторов первого типа мощностью X кВт каждый и n генераторов второго типа мощностью Y кВт каждый. Тогда

$$mX+nY=7000,\ (1)\qquad mX+nX=8000,\ (2)\qquad mY+nY=4000.\ (3)$$

Вычитая (1) из (2) и (3) из (1), получим $nX-nY=1000$ и $mX-mY=3000$. Поэтому $\dfrac{n(X-Y)}{m(X-Y)}=\dfrac{1000}{3000}$, т. е. $\dfrac{n}{m}=\dfrac{1}{3}$. Подставим $m=3n$ в (3): $3nY+nY=4000$, тогда $nY=1000$ и из (1) получаем $mX=7000-1000=6000$.

ОТВЕТ: 6000 кВт и 1000 кВт.