РЕШЕНИЕ ЗАДАНИЙ ПО МАТЕМАТИКЕ

Вариант 17091 для 9 класса

Задача 1.

При проектировании электростанции возникла необходимость решить уравнение

$$4x^4 + 4px^3 = (p-4)x^2 - 4px + p,$$

где p — целочисленный параметр, задаваемый разработчиком. Для быстрого и надежного решения требуется, чтобы корни уравнения были рациональными числами. При каких p это верно?

Решение.

Задача сводится к нахождению корней многочлена

$$f(x,p) = (x^2+1)(4x^2+4px-p).$$

Для дискриминанта квадратного трехчлена необходимо, чтобы $D/4 = 4p(p+1) \geq 0$.

Если $p = 0$ или $p = -1$, то существуют рациональные корни 0 и -1 соответственно.

Если же $p < -1$ или $p > 0$, то корни есть $x = -p/2 \pm \sqrt{p(p+1)}/2$.

Покажем, что число $\sqrt{p(p+1)}$ иррационально. Допустив противное, представим его как несократимую дробь m/n. Тогда $n^2(p^2+p) = m^2$ и, следовательно, m кратно n, т. е. дробь сократима.

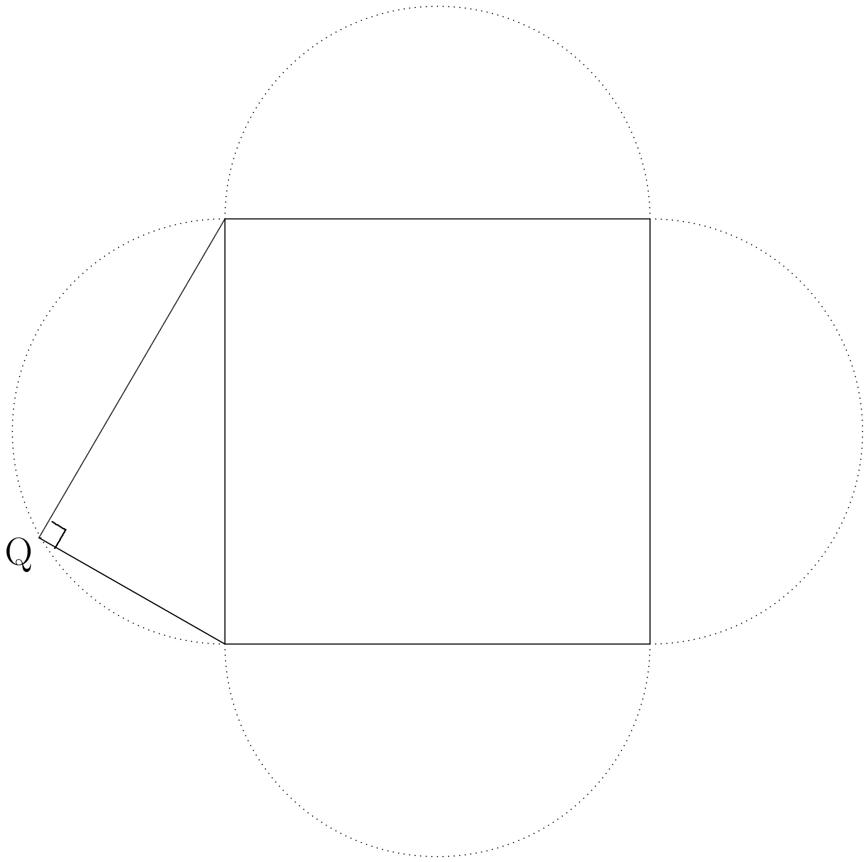
Ответ: $p = 0,\ -1$.

Задача 2.

В Царстве Колдовской Энергии на плоской равнине стоит заколдованная трансформаторная будка: наблюдателю, смотрящему параллельно земле, она видна только под углом $90°$. В поперечном сечении будка квадратная со стороной L локтей. Опишите геометрическое место точек на равнине, из которых будка видна, и определите минимальное и максимальное расстояние, с которого видна заколдованная будка. Углом, под которым фигура F видна из точки P, называется наименьший угол с вершиной P, содержащий фигуру F. В данном случае этот угол расположен в плоскости поперечного сечения будки.

Решение.

Достаточно вспомнить, что любой вписанный в окружность угол, опирающийся на диаметр, является прямым. Поэтому искомым множеством будут четыре полуокружности (диаметром L), опирающиеся на стороны квадрата (см. рис. ниже). Для наглядности также изображен один из прямых углов, под которым видна башня из чтоки Q.



Очевидно, что минимальное расстоние равно 0 (с угла квадрата), максимальное расстояние равно $L/2$ (от наиболее удаленной точки окружности до середины стороны квадрата).

Ответ: Четыре полуокружности, опирающиеся на стороны квадрата (см. точечный пунктир на рисунке выше); $\rho_{\min} = 0$; $\rho_{\max} = L/2$.

Задача 3.

Найдите все функции $f(x)$, определенные на всей числовой оси и удовлетворяющие условию

$$f(x - y) = f(x) \cdot f(y) \ \text{ при всех } \ x, y.$$

Решение.

Одно решение очевидно, это $f(x) \equiv 0$.

Рассмотрим функции, не равные тождественно нулю на всей числовой оси.

Положив $t = x - y$, получаем, что $f(t) = f(t+y)f(y)$. Поэтому $f(y)$ не обращается в 0 ни при каком y, так как иначе значение $f(t)$ было бы равно 0 при всех t, что противоречит условию задачи.

Положив $y = x/2$, получаем из исходного равенства, что $f(x/2) = f(x)f(x/2)$, причём мы уже знаем, что $f(x/2) \neq 0$. Деля на $f(x/2)$ левую и правую части, получаем $f(x) = 1$. Заметим, что число x при этом можно было выбирать произвольно, что и завершает доказательство.

Ответ: $f(x) \equiv 0$, $f(x) \equiv 1$, других нет.

Задача 4.

Целой частью $[x]$ вещественного числа x называется наибольшее целое M такое, что $M \leq x$. Например, $[\sqrt{2}] = 1$, $[2] = 2$, $[\pi] = 3$. Найдите все положительные вещественные числа x, для которых

$$x[x[x[x]]] < 2018.$$

Решение.

Заметим, что при $x > 0$ в левой части уравнения стоит монотонно неубывающая функция, и что при целых значениях x она равна x^4. Так как $2401 = 7^4$, то при $x \geq 7$ неравенство не выполняется.

Покажем, что оно выполнено при $0 < x < 7$. Действительно, в этом случае

$$0 \leq [x] \leq 6 \;\Rightarrow\; 0 \leq x[x] < 7 \cdot 6 = 42 \;\Rightarrow\; 0 \leq [x[x]] \leq 41 \;\Rightarrow$$
$$\Rightarrow\; 0 \leq x[x[x]] < 287 \;\Rightarrow\; 0 \leq x[x[x[x]]] < 286 \cdot 7 = 2002 < 2018.$$

Ответ: $0 < x < 7$.

Задача 5.

Найдите количество всех упорядоченных троек (x, y, z) чисел множества $\{1, 2, \ldots, 70\}$, для которых сумма

$$x^2 + y^2 + z^2$$

кратна 7.

Решение.

1. Рассмотрим остатки $r(x)$ от деления чисел x на 7:

x	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	...	69	70
$r(x)$	1	4	2	2	4	1	0	1	4	2	2	4	1	0	1	...	1	0

Они циклически повторяются 10 раз.

2. Найдем перебором неупорядоченные тройки $R = \{r(x_1), r(x_2), r(x_3)\}$, для к-рых
$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$ кратно 7:

$r(x_1)$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	2	2	2	4
$r(x_2)$	0	0	0	0	1	1	2	2	4	2	2	4	2	2	4	4
$r(x_3)$	0	1	2	4	2	4	2	4	4	2	4	4	2	4	4	4

Из таблицы видно что есть только две такие тройки: $R = \{0, 0, 0\}, \{1, 2, 4\}$.

3. Найдем кол-во троек (x_1, x_2, x_3), соответствующих $R = \{0, 0, 0\}$. Они могут быть трех видов:

1) $x_1 = x_2 = x_3$, таких троек (x_1, x_2, x_3) ровно 10;

2) из чисел x_1, x_2, x_3 ровно два одинаковых, таких $10 \times 9 = 90$;

3) все три числа x_1, x_2, x_3 попарно различны, таких $10 \times 9 \times 8/(3!) = 120$.

Итого $10 + 90 + 120 = 220$.

4. Найдем кол-во троек (x_1, x_2, x_3), соответствующих $R = \{1, 2, 4\}$.

Остатков 1 может быть $2 \times 10 = 20$ (по 2 в каждом из 10 циклов первой таблицы). Такое же точно количество остатков 1 и остатков 4. Таким образом, учитывая, что остатки не зависят друг от друга, получаем $(20)^3 = 8000$.

5) Всего $220 + 8000 = 8220$.

Ответ: 8220.