ЗАДАЧА 1 (ДЛЯ 8 КЛАССА). Решите уравнение в целых числах

$$20(X+1)^2 + 17(Y-2)^2 = 2017.$$

РЕШЕНИЕ. Положим $M = X+1$, $N = Y-2$. Тогда

$$20M^2 + 17N^2 = 2017. \tag{1}$$

Это остается в силе при смене знака каждой из переменных M, N, поэтому будем искать только неотрицательные M, N .

1. Заметим, что $M \neq 0$, так как 2017 не кратно 17. Число 2017 также не кратно 20, поэтому и $N \neq 0$. Итак, $MN \neq 0$.

2. Имеем $20M^2 > 0$, поэтому $17N^2 < 2017$ и $N^2 < 2017/17 < 119$. Число N целое, следовательно,

$$1 \leq N \leq 10. \tag{2}$$

3. Десятичная запись целого числа $20M^2$ оканчивается цифрой 0, поэтому $17N^2$ должно, как и 2017, оканчиваться цифрой 7. Квадрат целого числа оканчивается цифрами 0,1,4,5,6,9, к-рым соответствует последняя цифра 0,7,8,5,2,3 числа $17N^2$. Значит, последняя цифра числа N^2 однозначно 1, а у числа N — либо 1, либо 9.

4. С учетом (2) получаем $N = 1$ или $N = 9$. Если $N = 9$, то $20M^2 = 2017 - 17 \cdot 81 = 640$, $M^2 = 32$, что невозможно. Поэтому однозначно $N = 1$ и $M = 10$. Всего имеем ровно 4 решения уравнения (1): $(M; N) = (\pm 10; \pm 1)$, откуда, возвращаясь к переменным X, Y, получаем

ОТВЕТ. $(X; Y) = (-11; 1), (-11; 3), (9; 1), (9; 3)$.

ЗАДАЧА 13 (ДЛЯ 8 КЛАССА). В ночь с 3 на 4 декабря 2017 года состоялось "суперлуние": полная Луна находилась около самой близкой к Земле точки своей эллиптической орбиты. В прессе сообщалось, что размер видимого с Земли лунного диска увеличился на 21 %, но не уточнялось, какой именно размер. Если предположить, что размером является площадь, то на сколько процентов увеличился диаметр?

РЕШЕНИЕ. Даже не зная формулы для площади круга, задачу можно решить, если четко представлять себе квадратичный характер зависимости площади от линейного размера симметричной фигуры (правильного многоугольника, в пределе — круга) и смысл процентов. Пусть d_0 и d — диаметры исходного и измененного кругов, S и S_0 — их площади. Площадь круга пропорциональна квадрату диаметра с нек-рым коэффициентом пропорциональности k. Имеем $S = kd^2 = (1 + 0,21)S_0 = 1,21kd_0$. Сократив на k, получим $d^2 = 1,21d_0^2$, откуда $d = 1,1d_0$, т. е. диаметр увеличился на 10%.

ОТВЕТ: 10%.

ЗАМЕЧАНИЕ. Задача предлагалась на этапе, состоявшемся в ближайшие после этого "суперлуния" выходные. Данные прессы изменены для облегчения вычислений, реально сообщалось об увеличении размера (без уточнения какого) на 15%.

ЗАДАЧА 18 (ДЛЯ 8 КЛАССА). Имеется два аккумулятора одинаковой емкости. На первом техническом устройства аккумулятор разряжается за 40 ч непрерывной работы, а на втором — за 60 ч. Аккумуляторы можно менять местами. Какое наибольшее время работы двух устройств могут обеспечить два таких аккумулятора?

РЕШЕНИЕ. Пусть данный аккумулятор прослужит ровно X ч на первой установке и Y ч на второй. Оба устройства должны все время работать совместно, поэтому выполняется равенство

$$\frac{X}{40}+\frac{Y}{60}=\frac{X}{60}+\frac{Y}{40},$$

в котором левая часть описывает износ первого аккумулятора, а правая часть — второго. Отсюда следует, что $X=Y$. Полная разрядка аккумулятора означает равенство $\frac{X}{40}+\frac{X}{60}=1$, откуда $X=24$. Тогда время работы каждого из аккумуляторов есть $2X=48$.

ОТВЕТ: 48 часов.

ЗАДАЧА 19 (ДЛЯ 8 КЛАССА). Слова, как известно, имеют вес. Положительный вес имеет каждая буква, этот вес постоянен во всех сочетаниях, содержащих данную букву. Вес слова равен сумме весов всех входящих в него букв.

А. Найдутся ли такие веса букв, что "килограмм" имеет такой же вес, как "миллиграмм"? Сформулируйте условие, необходимое и достаточное для равенства этих весов, или докажите невозможность равенства.

В. Можно ли найти два слова из множества $M = \{$"килограмм", "миллиграмм", "эпиграмма"$\}$, имеющие одинаковый вес при любых весах букв? Найдите все такие пары или докажите, что их нет.

С. Можно ли разбить множество M на блоки, вес которых одинаков при любых весах букв? Найдите все такие разбиения или докажите, что их не существует.

РЕШЕНИЕ. Пусть w(s) — вес каждой буквы s алфавита.

А. Удалим из слов "килограмм" и "миллиграмм" буквы, входящие в оба слова, получим части "ко" и "млли". Приравняем суммы весов таких частей, получим необходимое и достаточное условие равновесия таких слов :
w(к)+w(о)=w(м)+2w(л)+w(и). (*)

В. Из 3 слов можно образовать 3 пары. Каждую пару "сократим"на повторяющиеся буквы, как при решении части А. Так, из слов "килограмм" и "миллиграмм" получим части "ко" и "млли". Если суммы w(к)+w(о) и w(м)+2w(л)+w(и) не равны (и такие веса букв найдутся), то слова "килограмм" и миллиграмм" имеют различный вес.

Аналогично показывается, что найдутся веса букв, при которых слова "килограмм"и "эпиграмма", а также слова "миллиграмм" и "эпиграмма" имеют разный вес. Итак, для каждой пары слов найдутся веса букв, при которых слова пары имеют разный вес.

С. Множество $\{x, y, z\}$ можно разбить на 2 или 3 блока: $x|y|z$, $xy|z$, $xz|y$, $x|yz$. В качестве x, y, x рассмотрим слова задачи. Для первого разбиения уже показано, что существуют веса букв, при которых веса двух из трех блоков разбиения различны. В каждом из остальных трех разбиений на два блока эти блоки содержат разное число букв, поэтому, в частности, при равенстве весов всех букв алфавита вес блоков различен. Итак, ответ на вопрос С — "Нет".

ОТВЕТЫ. А. Да, необходимо и достаточно условие (*). В и С — нет.