

## РЕШЕНИЕ ЗАДАНИЙ ПО МАТЕМАТИКЕ

Вариант 17081 для 8 класса

### Задача 1.

В ряд выписаны 100 ненулевых чисел. Каждое число кроме первого и последнего равно произведению двух соседних с ним чисел. Первое число равно 2018. Найдите последнее число в таком ряду.

#### Решение.

Обозначим сто чисел  $a_1, \dots, a_{100}$ . Согласно условию,

$$a_1 = \frac{a_2}{a_3}, \quad a_2 = \frac{a_3}{a_4}, \quad \dots, \quad a_{98} = \frac{a_{99}}{a_{100}}.$$

Перемножая первое и второе равенства, получаем

$$a_1 a_2 = \frac{a_2 a_3}{a_3 a_4} \Rightarrow a_1 = \frac{1}{a_4}.$$

Аналогично  $a_4 = \frac{1}{a_7}$ . Следовательно,  $a_1 = a_7$ .

Рассуждая таким же образом далее, получаем

$$a_1 = a_7 = \dots = a_{97} = 2018.$$

Теперь  $a_{100} = \frac{1}{a_{97}} = \frac{1}{2018}$ .

**Ответ:**  $a_{100} = \frac{1}{2018}$ .

### Задача 2.

В футбольном турнире каждая команда должна сыграть по одному матчу с каждой из остальных. Но в ходе турнира половина всех команд была дисквалифицирована и выбыла из дальнейшего участия. В результате оказалось сыграно 77 матчей, а выбывшие команды успели сыграть все матчи между собой, причем число всех матчей, сыгранное каждой выбывшей командой, одинаково. Сколько команд было в начале турнира?

#### Решение.

Согласно условию стартовало четное количество команд  $2n$ , из которых  $n$  дисквалифицировано. Выбывшие команды сыграли между собой  $\frac{n(n-1)}{2}$  матчей. Такое же количество матчей сыграли оставшиеся в турнире команды.

Пусть каждая из выбывших команд сыграла с  $k$  командами из числа оставшихся ( $k < n$ ). Тогда

$$n(n - 1) + kn = 77.$$

По условию  $n > 1$ . Очевидно, что  $k = 1$  не является решением, поэтому  $n + k - 1 > n$ . Разлагая на множители  $77 = 7 \cdot 11$ , получаем

$$n = 7, \quad n + k - 1 = 11,$$

откуда  $k = 5$ .

**Ответ:** 14 команд.

### Задача 3.

Число  $b$  является средним арифметическим чисел  $a$  и  $c$ . Найдите все упорядоченные тройки  $(a, b, c)$  таких чисел, для которых хотя бы одно из чисел  $1/a, 1/b, 1/c$  является средним арифметическим двух других.

### Решение.

Очевидно, что  $a, b, c$  не должны быть равны 0. Как указано,

$$2b = a + c$$

и должно быть выполнено одно из условий:

$$\frac{2}{b} = \frac{1}{a} + \frac{1}{c} \quad \text{или} \quad \frac{2}{a} = \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \quad \text{или} \quad \frac{2}{c} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b}.$$

Решая систему уравнений

$$\begin{cases} 2b = a + c; \\ \frac{2}{b} = \frac{1}{a} + \frac{1}{c}, \end{cases}$$

получаем, что  $a = b = c (= x)$ .

Решая систему уравнений

$$\begin{cases} 2b = a + c; \\ \frac{2}{a} = \frac{1}{b} + \frac{1}{c}, \end{cases}$$

получаем либо  $a = b = c$  (этот случай уже разобран), либо  $a = 4b, c = -2b (= 2x)$ , что даёт тройку  $(-4x, -x, 2x)$ .

**Ответ:** Это либо тройка  $(x, x, x)$ , где  $x \neq 0$ , либо тройка  $(-4x, -x, 2x)$ , где  $x \neq 0$ .

#### Задача 4.

В 9 часов утра из порта О в порт Е вышли корабли "Анин" и "Ванин". В тот же момент из порта Е в порт О отправился корабль "Санин". Все три судна идут одним курсом ("Санин" навстречу "Анину" и "Ванину") с постоянными, но различными скоростями. В 10 часов утра "Ванин" находился на одном расстоянии от "Анина" и "Санина". В 10 часов 30 минут "Санин" находился на одинаковом расстоянии от "Анина" и "Ванина". В какой момент "Анин" окажется посередине между "Ваниным" и "Саниным"?

#### Решение.

Для простоты расстояние между портами примем за 1. Пусть  $x$  – скорость "Анина",  $y$  – скорость "Ванина", а  $z$  – скорость "Санина". Тогда в 10 часов (т.е. через час после отправления)

$$2y = x + 1 - z, \quad (1)$$

а через полтора часа после отправления

$$2(1 - 1.5z) = 1.5x + 1.5y. \quad (2)$$

Через время  $t$  после отправления должно выполниться условие

$$2xt = 1 - tz + ty,$$

откуда

$$t(2x + z - y) = 1. \quad (3)$$

Из (1) и (2)

$$3z + 1.5x + 1.5y = 4y + 2z - 2x$$

или  $z = 2.5y - 3.5x$  Подставляя полученное выражение в (1), получаем, что  $y - x = 2/9$  С учетом этого из (1) имеем  $y + z + y - x = y + z + 2/9$ . Значит,  $t + z = 7/9$ . Поэтому из (3) получаем

$$t(2x + z - y) = t(z + y - 2x + 2y) = 1,$$

$$t(7/9 - 4/9) = 1,$$

откуда  $t = 3$ .

**Ответ:** в 12 ч дня.

**Задача 5.**

Числа  $a_1, b_1, a_2, b_2, \dots, a_n, b_n$  удовлетворяют условиям

$$a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2 = 2018^2, \quad b_1^2 + b_2^2 + \dots + b_n^2 = 2017^2,$$

$$a_1b_1 + a_2b_2 + \dots + a_nb_n = 2017 \cdot 2018.$$

Найдите отношения  $a_1/b_1, a_2/b_2, \dots, a_n/b_n$ .

**Решение.**

Выполним преобразования.

$$\begin{aligned} (2017a_1 - 2018b_1)^2 + (2017a_2 - 2018b_2)^2 + \dots + (2017a_n - 2018b_n)^2 &= \\ &= 2017^2 (a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2) + 2018^2 (b_1^2 + b_2^2 + \dots + b_n^2) - \\ &\quad - 2 \cdot 2017 \cdot 2018 (a_1b_1 + a_2b_2 + \dots + a_nb_n) = \\ &= 2017^2 \cdot 2018^2 + 2018^2 \cdot 2017^2 - 2 \cdot 2017^2 \cdot 2018^2 = 0. \end{aligned}$$

Поскольку сумма квадратов может равняться 0 тогда и только тогда, когда каждое слагаемое нулевое, то

$$2017a_k - 2018b_k = 0, \quad k = 1, \dots, n.$$

Отсюда получаем

**Ответ:**  $a_1/b_1 = a_2/b_2 = \dots = a_n/b_n = 2018/2017$ .