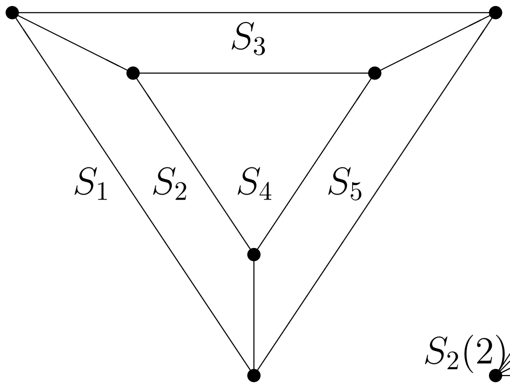
ЗАДАЧА 4 (ДЛЯ 10 КЛАССА).

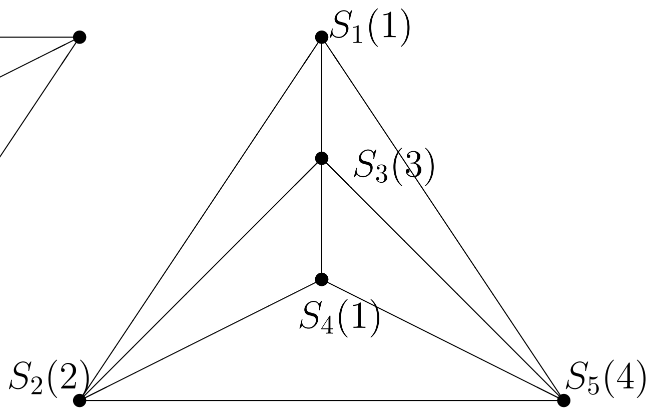
Грани усеченной треугольной пирамиды требуется раскрасить так, что любые две смежные грани (т. е. имеющие общий отрезок) получают разные цвета.

А. Каково минимальное число цветов, достаточное для такой раскраски?

Б. Сколькими способами можно получить такую раскраску с минимальным числом цветов?

РЕШЕНИЕ. Изобразим пирамиду (вид сверху).





Занумеруем грани: $S_1, \ldots, S_5$. Невидимая сверху нижняя грань пирамиды обозначена как внешность S_1 большого треугольника. Для наглядного изображения смежности граней построим диаграмму, на к-рой граням соответствуют точки, а смежным граням — отрезки, соединяющие точки. Задача сводится к раскраске всех 5 точек так, что концы каждого отрезка окрашиваются в разные цвета. В силу наличия треугольников необходимо не менее 3 цветов. Будем строить раскраску наименьшим числом цветов.

1. Точкам S_1, S_2, S_3, образующим треугольник, припишем различные цвета 1, 2, 3.

2. Тогда точка S_5, соединенная и с S_1, и с S_2, и с S_3, получает обязательно четвертый цвет 4.

3. Осталась неокрашенной только точка S_4. Ее цвет должен быть отличен от 2,3,4, это цвет 1.

Все остальные способы раскраски получаются перестановками цветов 1, 2, 3, 4. Имеется ровно $4! = 24$ перестановок и такое же кол-во способов раскраски.

ОТВЕТ: 4 цвета, 24 способа.

ЗАДАЧА 7 (ДЛЯ 10 КЛАССА). Решите систему уравнений

$$\begin{cases} 3x_1 = 2x_2^3 + 1, \\ 3x_2 = 2x_3^3 + 1, \\ 3x_3 = 2x_4^3 + 1, \\ 3x_4 = 2x_1^3 + 1. \end{cases}$$

РЕШЕНИЕ. Пусть $x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = x$, тогда получаем одно уравнение $2x^3 - 3x + 1 = 0$, $(x-1)(2x^2 + 2x - 1) = 0$. Его решения $x = 1$ и $x = \dfrac{-1 \pm \sqrt{3}}{2}$.

Покажем, что других решений нет. Пусть x_1, x_2, x_3, x_4 - решение, и, например, $x_1 \neq x_2$. Функция $y = \dfrac{2x^3 + 1}{3}$ строго возрастает. Если $x_2 > x_1$, то из 1-го и 4-го уравнений получаем $x_1 > x_4$. Тогда из 3-го и 4-го уравнений имеем $x_4 > x_3$. Далее аналогично получаем $x_3 > x_2$, т.е. $x_1 > x_2$. Противоречие.

ОТВЕТ. Два решения: $x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = 1$ и $x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = \dfrac{-1 \pm \sqrt{3}}{2}$.

ЗАДАЧА 10 (ДЛЯ 10 КЛАССА).

Андреевский флаг в виде синего креста, расположенного вдоль диагоналей белого прямоугольника с соотношением сторон $2:3$, является с 1992 г., как и в 1699 – 1917 годах официальным военно-морским флагом России. (Он назван в честь апостола Андрея Первозванного, покровителя мореплавателей и рыбаков, распятого, по христианскому преданию, на косом кресте.) Толщина каждой перекладины синего креста в 10 раз меньше длины флага, а ось перекладины совпадает с диагональю флага.

Найдите отношение площадей белой и синей частей флага.

РЕШЕНИЕ.

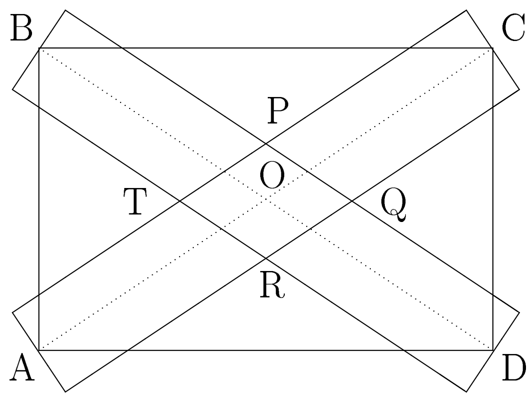


рис. 1

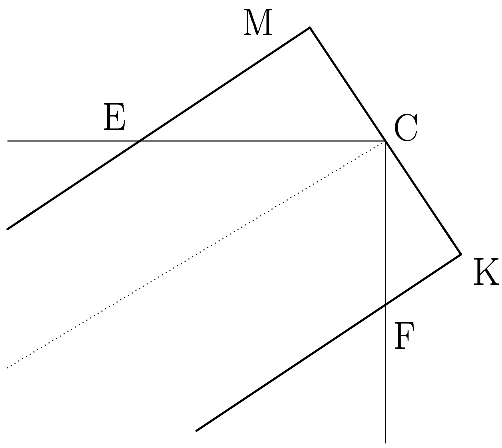


рис 2.

Флаг без соблюдения пропорций изображен на рис. 1. Диагональные полосы флага продлены за границы полотнища до образования прямоугольников. На рис. 2 увеличен правый верхний угол.

В задаче важно отношение площадей, поэтому реальные размеры флага значения не имеет. Полагаем, что длина флага равна $b = 3$ ед. длины, а ширина — $a = 2$ ед. Тогда толщина перекладин креста равна $h = b/10 = 0,3$ ед., а диагональ флага — $d = \sqrt{a^2 + b^2}$.

Найдем площади отдельных частей.

1. Площадь S_1 синей полосы вдоль одной диагонали равна площади достроенного прямоугольника за вычетом площадей четырех треугольников, выступающих за края флага. Треугольники попарно равны, поэтому

$$S_1 = h\,d - 2S(EMC) - 2S(CKF).$$

Пусть $\alpha = \angle CAD$. Тогда $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{a}{b}$. Из подобия прямоугольных треугольников имеем $\angle CEM = \angle FCK = \alpha$.

По условию $MC = CK = h/2$, $S(EMC) = \dfrac{h^2}{8}\operatorname{ctg}\alpha$, $S(FCK) = \dfrac{h^2}{8}\operatorname{tg}\alpha$. Следовательно,

$$S_1 = h\sqrt{a^2+b^2} - \frac{h^2}{4}\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\right).$$

2. Площадь S_2 ромба на пересечении перекладин креста.

Высота ромба равна толщине перекладины h. Острый угол между сторонами есть угол между диагоналями и равен 2α. Таким образом,

$$S_2 = h\cdot\frac{h}{\sin 2\alpha} = \frac{h^2}{2\sin\alpha\cos\alpha} = \frac{h^2\left(a^2+b^2\right)}{2ab}.$$

3. Площадь S_3 всей синей части флага равна

$$S_3 = 2S_1 - S_2 = 2h\sqrt{a^2+b^2} - \frac{2h^2}{4}\cdot\frac{a^2+b^2}{ab} - \frac{h^2\left(a^2+b^2\right)}{2ab}.$$

4. Площадь белой части найдем как дополнение синей части:

$$S_4 = ab - S_3 = ab - 2h\sqrt{a^2+b^2} + h^2\cdot\frac{a^2+b^2}{ab}.$$

5. Остается подставить числовые значения:

$$S_1 = \frac{240\sqrt{13}-39}{800},\quad S_2 = \frac{39}{400},\quad S_3 = \frac{120\sqrt{13}-39}{200},\quad S_4 = \frac{1239-120\sqrt{13}}{200}.$$

ОТВЕТ. Отношение указанных площадей равно $\dfrac{1239-120\sqrt{13}}{120\sqrt{13}-39}$.

ЗАДАЧА 14 (ДЛЯ 10 КЛАССА). Целой частью $\lfloor x \rfloor$ действительного числа x называется наибольшее целое M такое, что $M \le x$. Решите уравнение $\sqrt{\lfloor x/3-2 \rfloor} = \lfloor \sqrt{x/3-2} \rfloor$.

РЕШЕНИЕ. Введем переменную $y = x/3-2$. При этом $y \ge 0$. Уравнение примет вид

$$\sqrt{\lfloor y \rfloor} = \lfloor \sqrt{y} \rfloor. \tag{1}$$

Если $y = n^2$, где n целое, то левая и правая части уравнения (1) равны n.

Пусть $n^2 < y < (n+1)^2$. Тогда $n < \sqrt{y} < n+1$ и правая часть равна $\lfloor y \rfloor = n$. Уравнение (1) принимает вид $\sqrt{\lfloor x \rfloor} = n$. Возведем в квадрат: $\lfloor y \rfloor = n^2$. Это равносильно нер-вам $n^2 \le y < n^2+1$.

Таким образом, $y \in \bigcup_{n=0}^{\infty} [n^2; n^2+1)$.

Возвращаясь к прежней переменной $x = 3(y+2)$, получаем

ОТВЕТ: $x \in \bigcup_{n=0}^{\infty} [3(n^2+2); 3(n^2+3))$.