Олимпиада школьников «Надежда энергетики». Заключительный этап

РЕШЕНИЕ ЗАДАНИЙ ПО МАТЕМАТИКЕ

Вариант 17101 для 10 класса

Задача 1.

Имеется три электрогенератора, их мощности x_1, x_2, x_3 меньше 1 МВт. При анализе энергосистемы с такими генераторами выяснилось, что для осуществления некоторого процесса необходимо условие

$$2(x_1 + x_2 + x_3) + 4x_1x_2x_3 = 3(x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3) + 1.$$

Какова при его выполнении максимальная совместная мощность всех трех генераторов?

Решение.

Перепишем равенство из условия следующим образом:

$$4x_1x_2x_3 - 4(x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3) + 4(x_1x_2x_3) - 4 = \\ = -(x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3) + 2(x_1 + x_2 + x_3) - 3,$$

$$4(x_1 - 1)(x_2 - 1)(x_3 - 1) = -(x_1 - 1)(x_2 - 1) - (x_1 - 1)(x_3 - 1) - (x_2 - 1)(x_3 - 1),$$
$$4 = 1/(1 - x_1) + 1/(1 - x_2) + 1/(1 - x_3).$$

Рассмотрим функцию $f(x) = 1/(1 - x)$ на промежутке $(-\infty, 1)$. Функция выпукла вниз (видно на графике), поэтому

$$4 = f(x_1) + f(x_2) + f(x_3) \geq 3f((x_1 + x_2 + x_3)/3) = \frac{9}{3 - (x_1 + x_2 + x_3)}.$$

(Функция $f_1(x)$ линейна (никуда не выпукла) на интервале X тогда и только тогда, когда для любых $x_1, x_2, x_3 \in X$ выполняется рав-во

$$f_1((x_1 + x_2 + x_3)/3) = (f_1(x_1) + f_1(x_2) + f_1(x_3))/3.$$

Функция $f_2(x)$ выпукла вниз на X $\Leftrightarrow$

$$\forall x_1, x_2, x_3 \in X \quad f_2((x_1 + x_2 + x_3)/3) \leq (f_2(x_1) + f_2(x_2) + f_2(x_3))/3.$$

Функция $f_3(x)$ выпукла вверх на X $\Leftrightarrow$

$$\forall x_1, x_2, x_3 \in X \quad f_3((x_1 + x_2 + x_3)/3) \leq (f_3(x_1) + f_3(x_2) + f_3(x_3))/3.$$

В этом легко убедиться, построив графики функций f_1, f_2, f_3 в одной системе координат с одинаковыми x_1, x_2, x_3 и значениями $f_1(x_j) = f(x_j) = f_3(x_j)$, $j = 1, 2, 3$.)
Отсюда получим требуемое нер-во

$$x_1 + x_2 + x_3 \leq 3/4.$$

Ответ: $3/4$.

Задача 2.

В стране Лимонии лишь два денежных знака, достоинством в 7 лимонов и в 9 лимонов. Найдите все способы представления такими знаками суммы в 997 лимонов и укажите их количество.

Решение.

Задача сводится к уравнению

$$7x + 9y = 997 \tag{1}$$

в неотрицательных целых числах x, y. Представим его в виде $7x + 7y + 2y = 980 + 14 + 3$, откуда $2y - 3 = 994 - 7x - 7y$. Значит, $2y - 3$ кратно 7, $2y = 7n + 3$, $n \in \mathbb{Z}$. Умножим равенство $2y = 7n + 3$ на 4 и преобразуем результат: $7y + y = 28n + 7 + 5$, откуда $y - 5$ кратно 7,

$$y = 7k + 5, \ k \in \mathbb{Z}.$$

Из (1) выразим

$$x = (997 - 9y)/7 = (997 - 9(7k + 5))/7,$$
$$x = 136 - 9k, \ k \in \mathbb{Z}.$$

Из условий $x \geq 0$, $y \geq 0$ получаем

$$0 \leq k \leq \lfloor 136/9 \rfloor = 15.$$

Итак, общее решение уравнения (1) есть

$$x = 136 - 9k, \ y = 7k + 5, \quad k = 0, 1, \ldots, 15.$$

Всего имеется 16 частных решений:
если $k = 0$, то $x = 136, \ y = 5$;
если $k = 1$, то $x = 127, \ y = 12$;
$\vdots$
если $k = 15$, то $x = 1, \ y = 110$.

Ответ: $x = 136 - 9k, \ y = 7k + 5 \ \ k = 0, 1, \ldots, 15.$

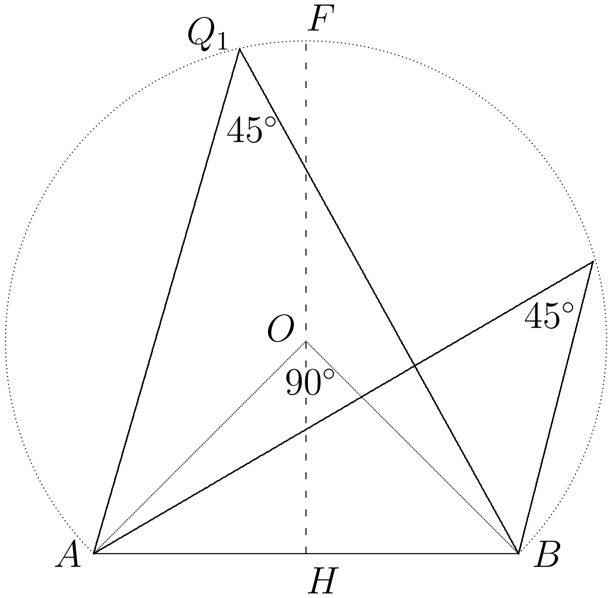
Задача 3.

В Царстве Колдовской Энергии на плоской равнине стоит заколдованная трансформаторная будка: наблюдателю, смотрящему параллельно земле, она видна только под углом $45°$. В поперечном сечении будка квадратная со стороной L локтей. Опишите геометрическое место точек на равнине, из которых будка видна, и определите минимальное и максимальное расстояние, с которого видна заколдованная будка. Углом, под которым фигура F видна из точки P, называется наименьший угол с вершиной P, содержащий фигуру F. В данном случае этот угол расположен в плоскости поперечного сечения будки.

Решение.

Как известно, любой вписанный в окружность угол вдвое меньше центрального угла, стягивающего ту же дугу.

Поэтому произвольный отрезок AB будет виден под углом $45°$, если вершина этого угла Q_i расположена на окружности с центром в вершине прямоугольного равнобедренного треугольника O, гипотенуза которого совпадает с заданным отрезком AB (см. рис).



Применим установленный факт для рассматривания квадрата. Ясно, что существуют точки, из которых будет видна только одна сторона квадрата, и точки, из которых будут видны две смежные стороны. Другие ситуации невозможны.

В первом случае в качестве отрезка AB будет выступать сторона квадрата. Центр дуги окружности, являющейся искомым г.м.т., будет лежать в вершине (прямом угле) равнобедренного прямоугольного треугольника, построенного на этой стороне (см. рис. выше). Максимальное расстояние от этой дуги до стороны квадрата отмечено на рисунке пунктиром. Оно равно

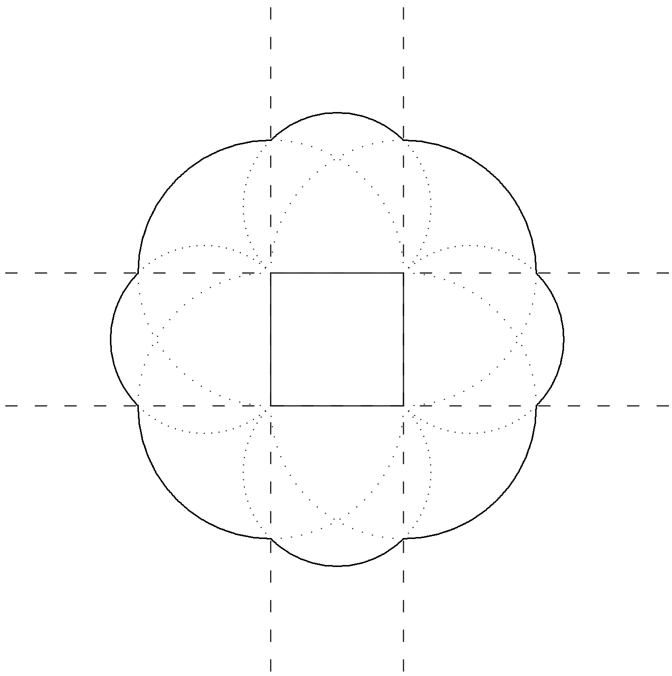
$$OH + OF = L/2 + L/\sqrt{2} = \frac{1+\sqrt{2}}{2}\,L.$$

Во втором случае в качестве отрезка AB будет выступать диагональ квадрата. Центр дуги окружности, являющейся искомым г.м.т., будет лежать в вершине исходного квадрата, в которой сходятся видимые стороны. Расстояние от любой точки этой дуги до вершины квадрата равно L. Это будет минимальное из искомых расстоний.

Все вместе даст восемь четвертьокружностей, изображенных ниже.

Ответ: Искомые дуги окружностей изображены ниже сплошной линией. Пунктиром отмечены прямые, разделяющие восемь зон.

$\rho_{\min} = L, \qquad \rho_{\max} = \dfrac{1+\sqrt{2}}{2}\,L$



Задача 4.

Найдите количество чисел N из множества $\{1, 2, \ldots, 2018\}$, для которых существуют положительные решения x уравнения

$$x^{[x]} = N$$

($[x]$ — это целая часть вещественного числа x, т. е. наибольшее целое, не превосходящее x).

Решение.

Заметим, что подходящие числа N для x таких, что $[x] = n$ – это числа от n^n до $(n+1)^{n-1}$, то есть в точности такие числа, что $[\sqrt[n]{N}] = n$. Такие числа (среди чисел от 1 до 2018) – это число 1, числа от 2^2 до 3^{2-1} (их ровно 5), числа от 3^3 до 4^{3-1} (их ровно 37), числа от 4^4 до 5^{4-1} (их ровно 369).

Итого мы получаем всего $1 + 5 + 37 + 369 = 412$ чисел.

Ответ: 412 чисел.

Задача 5.

Электрокабель длиной 21 м разрезают на 21 кусок. Для любых двух кусков их длины отличаются друг от друга не более, чем втрое. При каком наименьшем m обязательно найдутся два куска, длины которых отличаются друг от друга не более, чем в m раз?

Решение.

Если среди кусков кабеля есть хотя бы два, отличающиеся по длине, то взяв отношение меньшего к большему, получим, что $m \leq 1$.

Однако кабель может быть разрезан так, что все куски равны. Отсюда следует, что если $m < 1$, то найден способ разрезания, при котором не найдутся два куска, отличающиеся не более, чем в m раз.

Построенный пример доказывает, что наименьшее значение m равно 1.

Ответ: $m = 1$.