9 класс

1. Мост через реку соединяет два разных региона страны. Как-то раз один из регионов подновил краску на относящейся к нему части моста. Если бы свежеокрашенная часть моста оказалась на 30% больше, то неподкрашенная часть была бы на 50% меньше. Может ли окрашенная часть моста составлять ровно его половину? Какую часть моста нужно докрасить (или наоборот), чтобы была окрашена ровно половина моста?

Решение

Пусть x и y – доли подкрашенной и не... частей. Ясно, что $x + y = 1$. Согласно условию, $1,3x + 0,5y = 1$. Получаем уравнение

$$x + y = 1,3x + 0,5y$$

из которого можно найти отношение

$$\frac{x}{y} = \frac{5}{3}$$

Теперь можно долю окрашенной части

$$\frac{x}{x+y} = \frac{1}{1+y/x} = \frac{1}{1+3/5} = \frac{5}{8} = 0,625 = 62,5\%$$

Таким образом, подкрашено больше половины моста на 12,5%.

Ответ: подкрашено больше половины моста на 12,5%.

2. Усеченной разностью чисел x и y называется операция $x \dot{-} y$, результат которой равен обычной разности $x - y$, если $x \geqslant y$, и нулю, если $x < y$.

Решите систему уравнений $\begin{cases} 2x \dot{-} y = 0 \\ x + 2y = 1 \end{cases}$.

Решение. Первое уравнение системы эквивалентно неравенству $2x \leqslant y$. Выразим y из второго уравнения ($y = (1-x)/2$) и подставим в неравенство.

$$\frac{1-x}{2} \geqslant 2x \iff 1 \geqslant 5x$$

Таким образом, система имеет бесконечное количество решений, лежащих на луче $\begin{cases} x \leqslant 1/5, \\ y = (1-x)/2. \end{cases}$ Если решать начальное неравенство относительно y, то получится альтернативная запись ответа $\begin{cases} x = 1 - 2y, \\ y \geqslant 2/5. \end{cases}$

Ответ. $\begin{cases} x \leqslant 1/5, \\ y = (1-x)/2 \end{cases}$ или $\begin{cases} x = 1-2y, \\ y \geqslant 2/5. \end{cases}$

3. В ряд выписаны 2015 положительных чисел. Произведение всех чисел равно 2015, а произведение любых трех подряд стоящих чисел равно 1. Чему равно 1008-ое по счету число?

Решение

Из дополнительного условия следует, что если разбивать ряд на блоки по 3 числа "встык", двигаясь одновременно слева и справа навстречу, то 336-й блок слева и 336-й блок справа перекроются на среднем числе. Обозначим это число C.

Тогда произведение всех чисел равно, с одной стороны, 2015, а с другой стороны, $1/C$. Таким образом, $C = \dfrac{1}{2015}$.

Ответ. 1008-ое по счету число равно $\dfrac{1}{2015}$.

4. Существует ли выпуклый многоугольник, имеющий 2015 диагоналей?

Решение.

Число диагоналей выпуклого n-угольника равно

$$\frac{n(n-1)}{2} - n = \frac{n^2-3n}{2}.$$

Решим уравнение

$$\frac{n^2-3n}{2} = 2015 \quad \Longleftrightarrow \quad n^2 - 3n - 4030 = 0.$$

Его дискриминант $D = 9 + 4 \cdot 4030 = 16129$. Заметим, что $120^2 < 16129 < 130^2$ и D заканчивается цифрой 9. Если D является квадратом целого числа m, то m заканчивается цифрой 3 или 7, т.е. возможны только два варианта: $m = 123$ или $m = 127$. Легко проверяется, что $123^2 = (120+3)^2 \neq 16129$, а $127^2 = (130-3)^2 = 16900 + 9 - 2 \cdot 3 \cdot 130 = 16129$. Отсюда $n = \dfrac{3 \pm 127}{2}$. Выбирая положительное значение, получаем $n = 65$. Таким образом, указанный многоугольник существует, это 65-угольник.

Ответ. Да. Это 65-угольник.

5. Дан отрезок AB. Пользуясь только циркулем, необходимо отметить точку C, находящуюся на продолжении отрезка AB и такую, что отрезок AC вдвое длиннее исходного. Опишите алгоритм (последовательность действий) такого построения.

Решение. Достаточно сообразить, что самая длинная диагональ правильного шестиугольника является диаметром окружности, в которую он вписан, а его сторона равна радиусу этой окружности.

Ответ. Алгоритм построения.

1. Построить окружность с центром в т. B и радиусом AB.

2. Раствором циркуля, равным AB, отметить на полученной окружности шесть равноудаленных точек, начиная от т. A.

3. Точка, симметричная точке A относительно центра окружности, и будет являться искомой т. C.