9 класс.

Задача 1. Мальчики и девочки образовали хоровод таким образом, что число детей, у которых сосед справа — того же пола, равно числу детей, у которых сосед справа — другого пола. Каково может быть число всех детей в хороводе?

Решение. Пусть n – число детей, справа от которых стоит ребенок другого пола, а m – число детей, справа от которых стоит ребенок того же пола. Изначально $n = m$, т.е. общее количество детей (n + m) четно. Будем менять местами двух рядом стоящих детей так, чтобы мальчики собрались все подряд с одной стороны хоровода, а девочки с другой. Тогда n станет равно 2. При каждой такой перестановке детей числа n и m либо не меняются, либо одно из них увеличивается на 2, а второе уменьшается на 2. Это значит, что остаток от деления разности $(m˘n)$ на 4 не меняется.

Изначально этот остаток был равен 0.

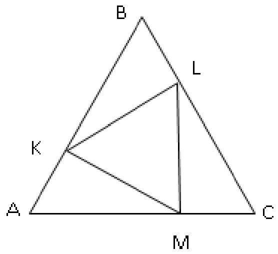
Если всего детей $2k$, $n = 2$, то $m = 2k˘2$. Тогда $m˘n = 2k˘4$.

Для того, чтобы остаток от деления $m˘n$ на 4 был равен нулю, надо, чтобы k делилось на 2. То есть общее число детей должно быть кратно 4.

Ответ. Любое натуральное число, кратное четырем.

Задача 2. На каждой стороне правильного треугольника взято по точке. Каждая сторона треугольника с вершинами в этих точках перпендикулярна какой-либо стороне исходного треугольника. В каком отношении каждая из взятых точек делит сторону исходного треугольника? Каково отношение площадей исходного и образованного треугольников?

Решение. Пусть точки K, L, M лежат соответственно на сторонах AB, BC и AC правильного треугольника ABC, причем $KL \perp BC$, $LM \perp AC$, $MK \perp AB$.



1) Тогда $\angle MKL = 180° - \angle AKM - \angle LKB = 180° - 90° - 30° = 60°$. Так же можно показать, что $\angle KML = 60°$, значит, треугольник KLM равносторонний. Прямоугольные треугольники AKM, BLK и CML равны по катету и острому углу, а так как $CM = AK = 1/2AM$ (как катет, лежащий против угла 30^o), то $CM : AM = 1 : 2$. Аналогично, $AK : KB = 1 : 2$, $BL : LC = 1 : 2$.

2) Пусть $CM = AK = BL = a$. Тогда сторона исходного треугольника равна $3a$, а сторона вписанного $a\sqrt{3}$, т.е. в $\sqrt{3}$ раз меньше. Поскольку площади равносторонних треугольников относятся друг к другу, как квадраты сторон, то площадь вписанного будет в 3 раза меньше.

Ответ: **1)** 1 : 2. **2)** 3 : 1.

Задача 3. Множество M состоит из n чисел, n нечетно, $n > 1$. Оно таково, что при замене любого его элемента на сумму остальных $n-1$ элементов из M сумма всех n элементов не изменяется. Найдите произведение всех n элементов множества M.

Решение. Пусть

$$M = \{x_1, \dots, x_n\}, \quad x_1 + \dots + x_n = S.$$

Заменим элемент x_1 на сумму остальных. Тогда

$$S = (S - x_1) + x_2 + x_3 + \dots + x_n = (S - x_1) + (S - x_1).$$

Рассуждая аналогично для других элементов, получаем, что

$$2x_k = S, \quad k = 1 \dots n.$$

Таким образом, все элементы множества равны друг другу. Поскольку при замене одного слагаемого сумма не изменяется, то это слагаемое должно быть равно тому, на что оно заменяется, т.е.

$$x_1 = x_2 + x_3 + \dots + x_n.$$

С учетом равенства элементов получаем $x_1 = (n-1)x_1$, следовательно, $x_1 = 0$. Тогда произведение всех чисел множества M равно 0.

Ответ: 0.

Задача 4. Дан квадратный трехчлен $g(x)$, имеющий ровно один корень. Найдите этот корень, если известно, что и многочлен $g(ax+b) + g(cx+d)$ $(a \neq c)$ имеет ровно один корень.

Решение. Пусть x_0 — единственный корень многочлена $g(x)$. Тогда функция $g(x)$ сохраняет знак во всех точках $x \neq x_0$ и только $g(x_0) = 0$. Следовательно, корнем многочлена $f(x) = g(ax+b)+g(cx+d)$ является только такая точка x_1, что $ax_1 + b = cx_1 + d = x_0$. Получаем уравнение с параметрами

$$(a-c)x_1 = (d-b).$$

Так как по условию $a \neq c$, то $x_1 = (d-b)/(a-c)$,

$$x_0 = a(d-b)/(a-c) + b = (ad-bc)/(a-c).$$

Ответ. $x_0 = -11$.

Задача 5. Имеется 4 числа, не все из которых одинаковы. Если взять любые два из них, то отношение суммы этих двух чисел к сумме двух других чисел будет равно одному и тому же значению k. Найдите значение k. Укажите хотя бы одну четверку чисел, удовлетворяющих условию. Опишите все возможные четверки таких чисел и выясните, сколько их.

Решение. Пусть x_1, x_2, x_3, x_4 — такие числа. Запишем соотношения для сумм двух чисел парами:

$$\frac{x_1+x_2}{x_3+x_4} = \frac{x_3+x_4}{x_1+x_2} = k, \tag{2}$$

$$\frac{x_1+x_3}{x_2+x_4} = \frac{x_2+x_4}{x_1+x_3} = k, \tag{3}$$

$$\frac{x_1+x_4}{x_2+x_3} = \frac{x_2+x_3}{x_1+x_4} = k. \tag{4}$$

Положим $A = x_1 + x_2$, $B = x_3 + x_4$. Тогда из (2) получим $A = kB$, $B = kA$, $AB \neq 0$, откуда $(k^2 - 1)A = 0$, $k = \pm 1$. Такие же значения получим, анализируя соотношения (3) и (4).

Если $k = 1$, то уравнения (2)–(4) принимают вид $x_1+x_2 = x_3+x_4$, $x_1+x_3 = x_2 + x_4$, $x_1 + x_4 = x_2 + x_3$, откуда находим общее решение $x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = C \neq 0$. Этот случай не соответствует условию (все числа получились равными).

Если $k = -1$, то каждое из уравнений (2)–(4) принимает вид $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0$, и общим решением является

$$x_1 = A,\quad x_2 = B,\quad x_3 = C,\quad x_4 = -A - B - C,\quad (A+B)(A+C)(B+C) \neq 0.$$

Ответ: $k = -1$.
$x_1 = A,\quad x_2 = B,\quad x_3 = C,\quad x_4 = -A - B - C,\quad (A+B)(A+C)(B+C) \neq 0.$
Множество наборов (x_1, x_2, x_3, x_4) бесконечно.