8 класс

1. После очередного трудового сезона электрифицированная часть Средиземской Тундры увеличилась вдвое. При этом ее неэлектрифицированная часть сократилась на 25%. Какую часть всей Тундры составляла в начале трудового сезона ее не обеспеченная электричеством часть?

Решение

Пусть x и y – доли электрифицированной и не... частей. Ясно, что $x + y = 1$. Согласно условию, $2x + 0,75y = 1$. Получаем уравнение

$$x + y = 2x + 0,75y$$

из которого можно найти отношение

$$\frac{x}{y} = \frac{1}{4}$$

Теперь можно найти нужное отношение

$$\frac{y}{x+y} = \frac{1}{x/y+1} = \frac{1}{1/4+1} = \frac{4}{5} = 0,8 = 80\%$$

Ответ: 80%

2. Таблица чисел из 20 строк и 15 столбцов, $A_1, \ldots, A_{20}$ — суммы чисел в строках, $B_1, \ldots, B_{15}$ — суммы чисел в столбцах.

а) Возможно ли, что $A_1 = \cdots = A_{20} = B_1 = \cdots = B_{15}$?

б) Если равенства п. а) выполняются, то чему равна сумма $A_1 + \cdots + A_{20} + B_1 + \cdots + B_{15}$?

Решение Пусть $A_i = B_j = X$ при $i = 1, \ldots 20$ и $j = 1, \ldots, 15$. Рассмотрим сумму S всех элементов таблицы. Имеем $S = 20X = 15X$, $X = 0$ и $A_1 + \cdots + A_{20} + B_1 + \cdots + B_{15} = 0$. Примером такой таблицы является, например, таблица из одних нулей. Другие случаи рассматривать нет необходимости.

Ответ: а) — да, б) — 0.

3. Можно ли разбить числа от 1 до 89 на группы так, чтобы в каждой группе было не менее четырех чисел, а одно из чисел в каждой группе было бы равно сумме остальных чисел той же группы?

Решение. Пусть в каждой группе $x_4 = x_1 + x_2 + x_3$. Тогда сумма всех чисел этой группы $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 2(x_1 + x_2 + x_3)$ четна. Таким образом, сумма всех чисел множества как сумма четных слагаемых четна.

С другой стороны, она равна

$$1 + \cdots + 89 = \frac{1}{2}\left((1+89) + (2+88) + \ldots + (89+1)\right) = \frac{1}{2} \cdot 90 \cdot 89 = 45 \cdot 89$$

и нечетна.

Полученное противоречие дает отрицательный ответ.

Ответ.: нельзя.

4. Рано утром включили насос и начали заполнять бассейн. В 10 ч утра подключили еще один насос и к 12 ч дня бассейн заполнился наполовину. В 17 ч бассейн был заполнен. Каким может быть самое позднее время включения первого насоса ?

Решение. Пусть объем бассейна равен V. Обозначим через x и y производительности насосов, а через t время работы первого насоса до момента включения второго.

Тогда $tx + 2x + 2y = V/2$, $5x + 5y = V/2$.

Откуда $tx + 2x + 2y = 5x + 5y$ или $tx = 3x + 3y$.

В итоге $t = 3 + 3y/x$. Так как $x > 0$ и $y > 0$, то $t \geqslant 3$.

Ответ. Первый насос включили не позднее 7 ч утра.

5. Целой частью $[x]$ числа x называется наибольшее целое число n такое, что $n \leqslant x$, например, $[10] = 10$, $[9,93] = 9$, $\left[\frac{1}{9}\right] = 0$, $[-1,7] = -2$. Найдите все решения уравнения $\left[\dfrac{x-1}{2}\right]^2 + 2x + 2 = 0$.

Решение. Из уравнения следует, что $2x = 2 - \left[\dfrac{x-1}{2}\right]^2$ – целое. Поэтому либо $2x = n \in \mathbb{Z}$, либо $x = n + \frac{1}{2}$ $(n \in \mathbb{Z})$. При этом нужно отдельно рассмотреть случаи четного и нечетного n.

1) Если $x = 2k$, то

$$\left[\frac{2k-1}{2}\right]^2 + 2(2k) + 2 = \left[k - \frac{1}{2}\right]^2 + 4k + 2 = (k-1)^2 + 4k + 2 =$$
$$= k^2 - 2k + 1 + 4k + 2 = (k^2 + 2k + 1) + 2 = (k+1)^2 + 2 \geqslant 2.$$

Так как полученное выражение строго положительно, то решения вида $x = 2k$ невозможны.

2) Если $x = 2k + 1$, то

$$\left[\frac{2k}{2}\right]^2 + 2(2k+1) + 2 = k^2 + 4k + 4 = (k+2)^2 = 0.$$

Полученное уравнение имеет решение $k = -2$, что дает $x = -3$.

3) Если $x = 2k + \frac{1}{2}$, то

$$\left[\frac{2k - \frac{1}{2}}{2}\right]^2 + 2\left(2k + \frac{1}{2}\right) + 2 = \left[k - \frac{1}{4}\right]^2 + 4k + 3 = (k-1)^2 + 4k + 3 =$$
$$= k^2 - 2k + 1 + 4k + 3 = (k^2 + 2k + 1) + 3 = (k+1)^2 + 3 \geqslant 3.$$

Так как полученное выражение строго положительно, то решения вида $x = 2k + \frac{1}{2}$ невозможны.

4) Если $x = 2k + 1 + \frac{1}{2}$, то

$$\left[\frac{2k + \frac{1}{2}}{2}\right]^2 + 2\left(2k + \frac{3}{2}\right) + 2 = \left[k + \frac{1}{4}\right]^2 + 4k + 3 + 2 = k^2 + 4k + 5 =$$
$$= k^2 + 4k + 4 + 1 = (k+2)^2 + 1 \geqslant 1.$$

Так как полученное выражение строго положительно, то решения вида $x = 2k + 1 + \frac{1}{2}$ невозможны.

Ответ. $x = -3$.