8 класс. 7881

Задача 1. Установок 3 типов всего не более 200. Установок типа 2 в 4 раза больше, чем типа 1, число установок типа 3 кратно числу установок типа 1. Если бы установок типа 3 было в 5 раз больше, то их было бы на 99 больше, чем установок типа 2. Найдите число установок каждого типа.

Решение. Если x_1, x_2, x_3 — количества установок типов 1,2,3, то условия представляютсчя соотношениями

$$x_1 + x_2 + x_3 \leq 200, \tag{1}$$

$$x_2 = 4x_1, \tag{2}$$

$$x_3 = kx_1, \tag{3}$$

$$5x_3 = x_2 + 99, \tag{4}$$

$$k, x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{N}.$$

Из (2)-(4) получаем $(5k-4)x_1 = 99$, откуда следует, что $5k-4$ и x_1 — натуральные делители числа 99, т. е. эти величины принадлежат множеству $\{1, 3, 9, 11, 33, 99\}$.

Если $x_1 = 1$, то $5k = 99 + 4$, это невозможно, так как k целое.

Если $x_1 = 3$, то $5k = 33 + 4$, это невозможно.

Если $x_1 = 9$, то $5k = 11 + 4$, $k = 3$, $x_2 = 36$, $x_3 = 27$, все условия выполняются.

Если $x_1 = 11$, то $5k = 9 + 4$, это невозможно.

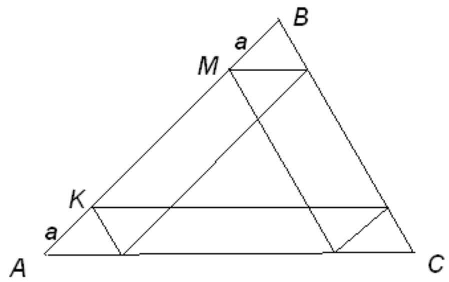
Если $x_1 = 33$, то $5k = 3 + 4$, это невозможно.

Если $x_1 = 99$, то $5k = 1 + 4$, $k = 1$, $x_3 = 99, x_2 = 4 \cdot 99$, не выполнено неравенство (1).

Ответ: 9, 36, 27.

Задача 2. На стороне AB треугольника ABC взята точка M. Она начинает двигаться параллельно BC до пересечения с AC, затем она движется параллельно AB до пересечения с BC и так далее. Верно ли, что через некоторое число таких шагов точка M вернется в исходное положение? Если это верно, то каково минимальное число шагов, достаточное для возврата?

Решение. Примем длину стороны AB за 1, и пусть точка M отстоит на a от точки B. Из свойств параллелограмма следует равенство маленьких треугольников, поэтому через 3 шага точка M окажется на расстоянии a от точки A, то есть на расстоянии $1 - a$ от точки B. Еще через 3 шага точка окажется на расстоянии $1 - (1 - a) = a$ от точки B, то есть вернется в исходное положение.



Особый случай – при $a = 1/2$. Тогда $1 - a = a$, и возврат произойдет уже через 3 шага.

Ответ: Верно.

Достаточно 3 шагов, если точка M делит сторону AB пополам,

6 шагов в остальных случаях.

Задача 3. Множество M состоит из n чисел, n нечетно, $n > 1$. Оно таково, что при замене любого его элемента на сумму остальных $n-1$ элементов из M сумма всех n элементов не изменяется. Найдите произведение всех n элементов множества M.

Решение. Пусть

$$M = \{x_1, \ldots, x_n\}, \quad x_1 + \cdots + x_n = S.$$

Заменим элемент x_1 на сумму остальных. Тогда

$$S = (S - x_1) + x_2 + x_3 + \cdots + x_n = (S - x_1) + (S - x_1).$$

Рассуждая аналогично для других элементов, получаем, что

$$2x_k = S, \quad k = 1 \ldots n.$$

Таким образом, все элементы множества равны друг другу. Поскольку при замене одного слагаемого сумма не изменяется, то это слагаемое должно быть равно тому, на что оно заменяется, т.е.

$$x_1 = x_2 + x_3 + \cdots + x_n.$$

С учетом равенства элементов получаем $x_1 = (n-1)x_1$, следовательно, $x_1 = 0$. Тогда произведение всех чисел множества M равно 0.

Ответ: 0.

Задача 4. Числа x, y, z таковы, что отношения

$$\frac{x+y}{z}, \quad \frac{x+z}{y}, \quad \frac{y+z}{x}$$

принимают одинаковое значение. Найдите его.

Решение. Пусть k — значение такого отношения. Тогда

$$\frac{x+y}{z} = \frac{x+z}{y} = \frac{y+z}{x} = k,$$

откуда $xyz \neq 0$ и

$$x + y = kz, \quad x + z = ky, \quad y + z = kx.$$

Складывая эти равенства, получаем

$$2(x + y + z) = k(x + y + z).$$

Возможны два случая:

$$x + y + z = 0 \tag{1}$$

или

$$x + y + z \neq 0, \quad k = 2. \tag{2}$$

В случае (1) получаем $z = -(x + y)$,

$$k = \frac{x + y}{-(x + y)} = -1,$$

всем условиям удовлетворяют, например, числа

$$x = y = 1, \quad z = -2.$$

В случае (2) всем условиям удовлетворяют, например, числа

$$x = y = z = 1.$$

Ответ: -1 или 2.

Задача 5. Маша, готовясь принять гостей, разложила 13 апельсинов и 3 яблока в 4 вазы, по 4 фрукта в каждую. Затем ее сестра Саша решила изменить состав фруктов в вазах. Она забирала одновременно по одному фрукту из каждой вазы и заменяла каждый фрукт на противоположный: яблоко на апельсин, а апельсин — на яблоко. Или же она заменяла на противоположные все четыре фрукта из одной вазы. Могла ли Саша получить во всех 4 вазах одновременно одинаковые фрукты: только яблоки или только апельсины?

Решение. Если интерпретировать вазы и фрукты в вазах как таблицу 4x4, каждому апельсину поставить в соответствие $+1$, а яблоку -1, то замена Сашей фруктов на противоположные равносильна смене знака в таблице у всех чисел в одной строке или в одном столбце. При этом знак произведения всех чисел строки или столбца меняться не будет, а, следовательно, и знак произведения чисел в таблице. Изначально произведение равно -1. А если все фрукты будут одинаковые, то произведение будет равно 1. А это невозможно.

Ответ. Не сможет.