7 класс

1. Мост через реку соединяет два разных региона страны. Как-то раз один из регионов подновил краску на относящейся к нему части моста. Если бы свежеокрашенная часть моста оказалась в 1,2 раза больше, то она составила бы ровно половину всего моста. Какую часть моста нужно докрасить, чтобы он стал окрашен ровно наполовину?

Решение

Пусть x – подкрашенная часть моста. (Весь мост принимаем за единицу.) Согласно условию,

$$1,2x = 1/2 \implies x = \frac{5}{12}.$$

Докрасить нужно

$$\frac{1}{2} - \frac{5}{12} = \frac{1}{12}.$$

Ответ: $\frac{1}{12}$ часть.

2. Таблица чисел из 20 строк и 15 столбцов заполнена числами 2 и 5.

а) Могут ли произведения чисел каждой строки быть четными, а каждого столбца — нечетными?

б) Могут ли произведения чисел каждой строки быть нечетными, а каждого столбца — четными?

Решение. Рассмотрим произведение P всех чисел таблицы.

Если произведение элементов строки i (столбца j) четно, то эта строка (этот столбец) содержит элемент $t_{ij} = 2$. Тогда и произведение всех элементов столбца j (строки i) четно.

Ответ: а) — нет, б) — нет.

3. Можно ли разбить числа от 1 до 77 на группы так, чтобы в каждой группе было не менее трех чисел, а одно из чисел в каждой группе было бы равно сумме остальных чисел той же группы?

Решение. Пусть в каждой группе $x_3 = x_1 + x_2$. Тогда сумма всех чисел этой группы $x_1+x_2+x_3 = 2(x_1+x_2)$ четна. Таким образом, сумма всех чисел множества как сумма четных слагаемых четна.

С другой стороны, она равна

$$1 + \dots + 77 = \frac{1}{2}\left((1+77) + (2+77) + \ldots + (77+1)\right) = \frac{1}{2} \cdot 78 \cdot 77 = 39 \cdot 77$$

и нечетна.

Полученное противоречие дает отрицательный ответ.

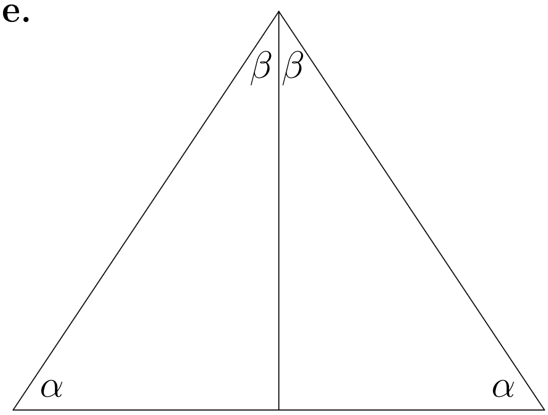
Ответ.: нельзя.

4. Два одинаковых прямоугольных треугольника приложили одинаковыми катетами друг к другу. При этому образовался больший треугольник, у которого один угол составляет среднее арифметическое двух других углов.

а) Может ли длина одной стороны большого треугольника составлять среднее арифметическое двух других сторон?

б) Может ли длина какой-либо стороны большого треугольника НЕ быть равной среднему арифметическому двух других сторон?

Решение.



Обозначим углы исходного прямоугольного треугольника через α и β. Ясно, что $\alpha+\beta=90$ (градусов). Пусть при описанных действиях удваивается угол β. Рассмотри два случая.

1-й случай. $\alpha \leqslant \beta$.

Ясно, что наибольший угол треугольника – 2β – не может быть средним арифметическим двух других. Поэтому

$$\alpha=\frac{\alpha+2\beta}{2}=\frac{\alpha+2(90-\alpha)}{2}=90-\frac{\alpha}{2},$$

откуда $\alpha=60$. Но $\alpha \leqslant 45$. Получили противоречие.

2-й случай. $\alpha>\beta$.

Если средним арифметическим является 2β, то

$$2\beta=\frac{\alpha+\alpha}{2}=\alpha=90-\beta,$$

откуда $\beta=30$ и $\alpha=60$, т.е. больший треугольник – равносторонний.

Если средним арифметическим является α, то

$$\alpha=\frac{\alpha+2\beta}{2}=\frac{\alpha+2(90-\alpha)}{2}=90-\frac{\alpha}{2},$$

откуда $\alpha = 60$ и $\beta = 60$, т.е. больший треугольник – равносторонний.

Ясно, что в равностороннем треугольнике каждая сторона является средним арифметическим двух других.

Ответ. а) может; б) не может.

5. Целой частью $[x]$ числа x называется наибольшее целое число n такое, что $n \leqslant x$, например, $[10] = 10$, $[9,93] = 9$, $\left[\frac{1}{9}\right] = 0$, $[-1,7] = -2$. Найдите все решения уравнения $\left[\dfrac{x+3}{2}\right]^2 - x = 1$.

Решение.

Из уравнения следует, что $x = \left[\dfrac{x+3}{2}\right]^2 - 1$ – целое. Поэтому $x = n \in \mathbb{Z}$, но нужно отдельно рассмотреть случаи четного и нечетного n.

Предварительно перенесем все слагаемые в левую часть уравнения.

1) Если $x = 2k$.

$$\left[\frac{2k+3}{2}\right]^2 - 2k - 1 = \left[k + 1 + \frac{1}{2}\right]^2 - 2k - 1 =$$
$$= (k+1)^2 - 2k - 1 = k^2 = 0$$

Полученное уравнение имеет решение $k = 0$, что дает $x = 0$.

2) Если $x = 2k + 1$.

$$\left[\frac{2k+4}{2}\right]^2 - (2k+1) - 1 = (k+2)^2 - 2k - 2 = k^2 + 2k + 2 =$$
$$= (k^2 + k) + (k+1) + 1 = k(k+1) + (k+1) + 1 = (k+1)(k+1) + 1 \geqslant 1.$$

Так как полученное выражение строго положительно, то решения вида $x = 2k + 1$ невозможны.

Ответ. $x = 0$.