7 класс. 7771

Задача 1. Установок 3 типов всего не менее 100. Установок типа 2 в 4 раза больше, чем типа 1, число установок типа 3 кратно числу установок типа 1. Если бы установок типа 3 было в 5 раз больше, то их было бы на 22 больше, чем установок типа 2. Найдите число установок каждого типа.

Решение. Если x_1, x_2, x_3 — количества установок типов 1,2,3, то условия представляютсчя соотношениями

$$x_1 + x_2 + x_3 \geq 100, \tag{1}$$
$$x_2 = 4x_1, \tag{2}$$
$$x_3 = kx_1, \tag{3}$$
$$5x_3 = x_2 + 22, \tag{4}$$
$$k, x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{N}.$$

Из (2)-(4) получаем $(5k-4)x_1 = 22$, откуда следует, что $5k-4$ и x_1 — натуральные делители числа 22, т. е. эти величины принадлежат множеству $\{1, 2, 11, 22\}$.

Если $x_1 = 1$, то $5k = 22 + 4$, это невозможно, так как k целое.

Если $x_1 = 2$, то $5k = 11 + 4$, $k = 3$, $x_2 = 8$, $x_3 = 6$, не выполняется (1).

Если $x_1 = 11$, то $5k = 2 + 4$, это невозможно.

Если $x_1 = 22$, то $5k = 1 + 4$, $k = 1$, $x_2 = 88$, $x_3 = 22$, все условия выполняются.

Ответ: 22, 88, 22.

Задача 2. Треугольник разрезали на два треугольника. Найдите наибольшее значение N такое, что среди 6 углов этих двух треугольников ровно N одинаковых.

Решение. Пример на $N = 4$ – равнобедренный прямоугольный треугольник, поделенный на два равнобедренных прямоугольных: четыре угла по 45°. Допустим, нашлось пять равных углов. Тогда в одном из треугольников равны все три угла, то есть все они, а с ними и два угла другого треугольника равны 60°. Но тогда оба эти треугольника – равносторонние, а из двух равносторонних треугольников нельзя сложить треугольник.

Ответ: N=4.

Задача 3. Множество M состоит из n чисел, n нечетно, $n > 1$. Оно таково, что при замене любого его элемента на сумму остальных $n-1$ элементов из M сумма всех n элементов не изменяется. Найдите произведение всех n элементов множества M.

Решение. Пусть

$$M = \{x_1, \dots, x_n\}, \quad x_1 + \dots + x_n = S.$$

Заменим элемент x_1 на сумму остальных. Тогда

$$S = (S - x_1) + x_2 + x_3 + \dots + x_n = (S - x_1) + (S - x_1).$$

Рассуждая аналогично для других элементов, получаем, что

$$2x_k = S, \quad k = 1 \dots n.$$

Таким образом, все элементы множества равны друг другу. Поскольку при замене одного слагаемого сумма не изменяется, то это слагаемое должно быть равно тому, на что оно заменяется, т.е.

$$x_1 = x_2 + x_3 + \dots + x_n.$$

С учетом равенства элементов получаем $x_1 = (n-1)x_1$, следовательно, $x_1 = 0$. Тогда произведение всех чисел множества M равно 0.

Ответ: 0.

Задача 4. Числа x, y, z таковы, что отношения

$$\frac{x+y}{z}, \quad \frac{x+z}{y}, \quad \frac{y+z}{x}$$

принимают одинаковое значение. Найдите его.

Решение. Пусть k — значение такого отношения. Тогда

$$\frac{x+y}{z} = \frac{x+z}{y} = \frac{y+z}{x} = k,$$

откуда $xyz \neq 0$ и

$$x + y = kz, \quad x + z = ky, \quad y + z = kx.$$

Складывая эти равенства, получаем

$$2(x + y + z) = k(x + y + z).$$

Возможны два случая:

$$x + y + z = 0 \tag{1}$$

или
$$x + y + z \neq 0, \quad k = 2. \tag{2}$$
В случае (1) получаем $z = -(x + y)$,
$$k = \frac{x + y}{-(x + y)} = -1,$$
всем условиям удовлетворяют, например, числа
$$x = y = 1, \quad z = -2.$$
В случае (2) всем условиям удовлетворяют, например, числа
$$x = y = z = 1.$$

Ответ: -1 или 2.

Задача 5. Мама поставила на стол вазу с 15 мандаринами. Один из гостей взял два мандарина, мама взамен положила одно яблоко. Другие гости тоже стали брать по два фрукта. Каждый раз, когда гость брал два одинаковых фрукта (два мандарина или два яблока), мама взамен клала в вазу одно яблоко; если же гость брал два разных фрукта (один мандарин и одно яблоко), мама клала в вазу один мандарин. В итоге в вазе остался один фрукт. Какой?

Решение. Можно заметить, что количество мандаринов либо не меняется, либо уменьшается на два. Поскольку мандаринов было нечетное количество, в конце один мандарин обязательно останется.

Ответ. Остался мандарин.