10 класс

1. Известно, что $x + \dfrac{1}{x} \leqslant 4$. Найдите область значений функции

$$f(x) = x^3 + \frac{1}{x^3}.$$

Решение. Пусть $g(x) = x + \dfrac{1}{x}$. Если $x > 0$, то $g(x) \geqslant 2$. Вместе с условием задачи получаем, что $2 \leqslant g(x) \leqslant 4$ при $x > 0$. Теперь

$$f(x) = \left(x + \frac{1}{x}\right)\left(x^2 - 1 + \frac{1}{x^2}\right) = g(x)\left(\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - 2 - 1\right) = g(x)\left(g^2(x) - 3\right).$$

Если $g(x) \geqslant 2$, то $g(x)\left(g^2(x) - 3\right) \geqslant 2(2^2 - 3) = 2$.

Если $g(x) \leqslant 4$, то $g(x)\left(g^2(x) - 3\right) \leqslant 4(4^2 - 3) = 52$.

Итак, если $x > 0$, то $f(x) \in [2; 52]$.

Заметим, что обе границы достигаются. Нижняя — при $x = 1$, верхняя — при таком x, при котором $g(x) = 4$. Он находится из уравнения $x + 1/x = 4$ и равен $2 \pm \sqrt{3}$.

Пусть теперь $x < 0$. Функции $g(x)$ и $f(x)$ нечетны, поэтому, если $x < 0$, то $g(x) \leqslant -2$, $f(x) \leqslant -2$

Для всех $M < 0$ из неравенства $x < \sqrt[3]{M}$ следует, что $f(x) = x^3 + 1/x^3 < x^3 < M$. Это означает, что функция $f(x)$ не ограничена снизу, т.е. любое отрицательное число, меньшее -2, принадлежит области ее значений.

Ответ. $f(x) \in [-\infty; -2] \cup [2; 52]$.

2. Усеченной разностью чисел x и y называется операция $x \dot{-} y$, результат которой равен обычной разности $x - y$, если $x \geqslant y$, и нулю, если $x < y$. Решите систему уравнений $\begin{cases} 5x \dot{-} (y + 6) = 0 \\ 2x + 3y = 1 \end{cases}$.

Решение.

Первое уравнение системы эквивалентно неравенству $5x \leqslant y + 6$. Выразим y из второго уравнения ($y = (1 - 2x)/3$) и подставим в неравенство.

$$5x \leqslant \frac{1 - 2x}{3} + 6 \iff 17x \leqslant 19$$

Таким образом, система имеет бесконечное количество решений, лежащих на луче $\begin{cases} x \leqslant 19/17, \\ y = (1 - 2x)/3. \end{cases}$ Если решать начальное неравенство относительно y, то получится альтернативная запись ответа $\begin{cases} x = (1 - 3y)/2, \\ y \geqslant -7/17. \end{cases}$

Ответ. $\begin{cases} x \leqslant 19/17, \\ y = (1-2x)/3 \end{cases}$ или $\begin{cases} x = (1-3y)/2, \\ y \geqslant -7/17. \end{cases}$

3. В квадратной таблице из 2015 строк и столбцов расставлены положительные числа. Произведение чисел в каждой строке и в каждом столбце равно 1, а произведение чисел в любом квадрате размером 1008 x 1008 клеток равно 2. Какое число стоит в центре таблицы?

Решение

Рассмотрим первые 1008 строк таблицы. Из дополнительного условия следует, что если покрывать эти строки двумя квадратами размера 1008×1008, то эти квадраты перекроются одним столбцом. Обозначим произведение чисел в этом столбике (их 1008 штук) через M.

Тогда произведение всех чисел в первых 1008 строках таблицы равно, с одной стороны, 1, а с другой стороны, $2^2/M$.

Таким образом, $M = 4$.

Теперь рассмотрим средний столбец таблицы. Он аналогичным образом разбивается на два блока по 1008 элементов, которые перекрываются на центральном элементе таблицы (если двигаться сверху и снизу навстречу). Обозначим этот элемент C.

Произведение всех чисел этого столбца равно 1. Поэтому $1 = M^2/C$.

Откуда $C = M^2 = 16$.

Ответ. В центре таблицы стоит число 16.

4. Маленькая егоза побежала наперегонки с лошадкой, установленной на механической карусели. Через a секунд она обнаружила, что лошадка, сделав круг, догнала ее. Мгновенно развернувшись, маленькая егоза побежала с той же скоростью навстречу лошадке и встретилась с ней через $\frac{a}{2}$ секунд. Определите, за какое время карусель совершает полный оборот, если все движения равномерны.

Решение.

Пусть v – угловая скорость егозы, U – угловая скорость карусели, а x – период обращения карусели. Отметим, что $\frac{a}{2} < x < a$. Расстояние, которое егоза пробежала за a секунд, карусель прошла за $a - x$ секунд. То есть имеем

$$va = U(a - x).$$

После разворота расстояние, которое егоза пробежала за $\frac{a}{2}$ секунд, карусель прошла бы за $x - \frac{a}{2}$ секунд, то есть

$$\frac{va}{2} = U\left(x - \frac{a}{2}\right).$$

Отсюда получаем уравнение

$$\frac{a-x}{a} = \frac{2x-a}{a}$$

Находим из него $x = \frac{2}{3}a$.

Ответ. Карусель совершает полный оборот за $\frac{2}{3}a$ секунд.

5. Решите уравнение $[\sin x]^2 = \cos^2 x - 1$, в котором $[a]$ означает целую часть числа a.

Решение. Целое число $[\sin x]$ может принимать только значения $0, 1, -1$.

1) Если $[\sin x] = 0$, то $\cos^2 x = 0 + 1 = 1$, т.е. $\cos x = \pm 1$. Решая это уравнение, находим $x = \pi n$. В этих точках $\sin^2 x = 0$. Равенство верно.

2) Если $[\sin x] = \pm 1$, то $\cos^2 x = (\pm 1)^2 + 1 = 2$, чего не бывает. Ответом будет являться только первый случай.

Ответ. $x = \pi n,\ n \in \mathbb{Z}$.