10 класс. 7101

Задача 1. В стране «Энергетика» 150 заводов и некоторые из них соединены автобусными маршрутами, которые не останавливаются нигде, кроме этих заводов. Оказалось, что любые четыре завода можно разбить на две пары так, что между заводами каждой пары ходит автобус. Найдите наименьшее число пар заводов, которые могут быть соединены автобусными маршрутами.

Решение. Предположим, что какой-то завод X соединен автобусными маршрутами не более чем с 146 заводами. Тогда четверка заводов, состоящая из X и каких-то трех, с которыми он не соединен, не удовлетворяет условию задачи, поскольку X не может быть в паре ни с одним из трех оставшихся заводов. Поэтому каждый завод соединен хотя бы с 147 заводами. Следовательно, всего пар заводов, соединенных автобусными маршрутами, не меньше, чем $\frac{147\cdot 150}{2} = 11025$.

Покажем теперь, что может быть ровно 11025 пар заводов. Занумеруем заводы числами от 1 до 150 и соединим автобусными маршрутами все заводы, кроме первого и 150-го, а также заводов, номера которых отличаются на единицу. Проверим, что эта конструкция удовлетворяет условию задачи. Поскольку каждый завод соединен автобусными маршрутами с 147 заводами, общее количество пар соединенных заводов в точности равно $\frac{147\cdot 150}{2} = 11025$.

Возьмем теперь любую четверку заводов. Возможны два случая.

1) Есть завод, не соединенный с двумя из трех остальных заводов. Пусть завод A не соединен с заводами B и C, но соединен с заводом D. Тогда заводы B и C должны быть соединены между собой, так как остатки от деления их номеров на 150 различаются на 2. Поэтому пары (A,D) и (B,C) нам подходят.

2) Все заводы соединены с не менее чем двумя из трех остальных заводов. Пусть завод A соединен с заводами B и C. По предположению завод D должен быть соединен с B или C. Если он соединен с B, то нам подойдут пары (A,C) и (B,D), а если с C, то пары (A,B) и (C,D).

Ответ: 11025.

Задача 2. Для числовой последовательности $x_0, x_1, \ldots, x_n, x_{n+1}, \ldots$ выполняются соотношения $2x_n = x_0 + x_1 + \cdots + x_{n-1} - x_n$ при всех $n = 0, 1, 2, \ldots$ Найдите каждый член x_n такой последовательности и значения сумм $S_n = x_0 + x_1 + \cdots + x_n$.

Решение. Имеем

$$x_n = (1/3)(x_0 + x_1 + \cdots + x_{n-1}).$$

Тогда x_0 — любое, и по индукции

$$x_n = x_0 4^{n-1}/3^n \text{ при } n \geq 1,$$

$$S_n = x_0(4/3)^n.$$

Ответ: $x_n = x_0 4^{n-1}/3^n$ при $n \geq 1$, $\quad S_n = x_0(4/3)^n$, x_0 — любое.

Задача 3. Шесть чисел записаны в ряд. Известно, что среди них есть единица и любые три соседних числа имеют одинаковое среднее арифметическое. Найдите максимальное значение среднего геометрического любых трех соседних в этом ряду чисел, если среднее арифметическое всех 6 чисел равно A.

Решение. Запишем в ряд $a_1, \ldots, a_6$. Из условий

$$(1/3)(a_1 + a_2 + a_3) = (1/3)(a_2 + a_3 + a_4),$$

$$(1/3)(a_2 + a_3 + a_4) = (1/3)(a_3 + a_4 + a_5),$$

$$(1/3)(a_3 + a_4 + a_5) = (1/3)(a_4 + a_5 + a_6)$$

получаем $a_1 = a_4 = x,\ a_2 = a_5 = y,\ a_3 = a_6 = z$. Запись в ряд имеет вид

$$x, y, z, x, y, z \qquad (1).$$

Среди 6 чисел есть по крайней мере три пары равных. Из (1) следует, что неважно, какое из значений равно 1, без ограничения общности положим $z = 1$ и перепишем (1) в виде $x, y, 1, x, y, 1$. Из условия на их среднее арифметическое имеем $(1/6)(x + y + 1 + x + y + 1) = (1/3)(x + y + 1) = A$, откуда

$$y = 3A - 1 - x.$$

Обозначим $p = 3A-1$, тогда $y = p-x$ и среднее геометрическое трех соседних чисел выражается как $g(x) = \sqrt[3]{x(p-x)}$. Функция $g(x)$ имеет максимум в той же точке, что и функция

$$f(x) = g^3(x) = x(p - x).$$

Это парабола, ее максимум достигается в вершине с координатами $(p/2,\ p^2/4)$. Таким образом, максимальное значение функции $g(x) = \sqrt[3]{f(x)}$ есть

$$\sqrt[3]{p^2/4} = \sqrt[3]{(3A-1)^2/4}.$$

Ответ: $\sqrt[3]{(3A-1)^2/4}$.

Задача 4. Дан квадратный трехчлен $g(x) = x^2 + ax + b$, имеющий ровно один корень. Найдите коэффициенты a и b, если известно, что и многочлен $g(x^5 + 2x - 1) + g(x^5 + 3x + 1)$ имеет ровно один корень.

Решение. Пусть x_0 — единственный корень многочлена $g(x)$. Тогда функция $g(x)$ сохраняет знак во всех точках $x \neq x_0$ и только $g(x_0) = 0$. Следовательно, корнем многочлена $f(x) = g(x^5 + 2x - 1) + g(x^5 + 3x + 1)$ является только такая точка x_1, что

$$x_1^5 + 2x_1 - 1 = x_1^5 + 3x_1 + 1 = x_0.$$

Упрощая уравнение: $2x_1 - 1 = 3x_1 + 1$, находим $x_1 = -2$. Следовательно, $x_0 = (-2)^5 + 2(-2) - 1 = -37$.

Из единственности корня следует, что $g(x)$ имеет вид

$$g(x) = (x - x_0)^2 = (x + 37)^2 = x^2 + 74x + 37^2,$$

откуда $a = 74$, $b = 37^2 = 1369$.

Ответ: $a = 74$, $b = 37^2 = 1369$.

Задача 5. Имеется 4 числа, не все из которых одинаковы. Если взять любые два из них, то отношение суммы этих двух чисел к сумме двух других чисел будет равно одному и тому же значению k. Найдите значение k. Укажите хотя бы одну четверку чисел, удовлетворяющих условию. Опишите все возможные четверки таких чисел и выясните, сколько их.

Решение. Пусть x_1, x_2, x_3, x_4 — такие числа. Запишем соотношения для сумм двух чисел парами:

$$\frac{x_1 + x_2}{x_3 + x_4} = \frac{x_3 + x_4}{x_1 + x_2} = k, \tag{2}$$

$$\frac{x_1 + x_3}{x_2 + x_4} = \frac{x_2 + x_4}{x_1 + x_3} = k, \tag{3}$$

$$\frac{x_1 + x_4}{x_2 + x_3} = \frac{x_2 + x_3}{x_1 + x_4} = k. \tag{4}$$

Положим $A = x_1 + x_2$, $B = x_3 + x_4$. Тогда из (2) получим $A = kB$, $B = kA$, $AB \neq 0$, откуда $(k^2 - 1)A = 0$, $k = \pm 1$. Такие же значения получим, анализируя соотношения (3) и (4).

Если $k = 1$, то уравнения (2)–(4) принимают вид $x_1 + x_2 = x_3 + x_4$, $x_1 + x_3 = x_2 + x_4$, $x_1 + x_4 = x_2 + x_3$, откуда находим общее решение $x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = C \neq 0$. Этот случай не соответствует условию (все числа получились равными).

Если $k = -1$, то каждое из уравнений (2)–(4) принимает вид $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0$, и общим решением является

$$x_1 = A, \quad x_2 = B, \quad x_3 = C, \quad x_4 = -A - B - C, \quad (A+B)(A+C)(B+C) \neq 0.$$

Ответ: $k = -1$.
$x_1 = A, \quad x_2 = B, \quad x_3 = C, \quad x_4 = -A - B - C, \quad (A+B)(A+C)(B+C) \neq 0.$
Множество наборов (x_1, x_2, x_3, x_4) бесконечно.