Вариант 1

1. (*10 баллов*) У семейной пары дни рождения в один и тот же день. При очередном праздновании их общего дня рождения муж заметил, что сейчас ему втрое больше лет, чем было его жене тогда, когда ему было столько лет, сколько его жене сейчас. А когда ей будет столько лет, сколько ему сейчас, им обоим вместе будет 63 года. Сколько лет сейчас мужу?

Ответ: 27.

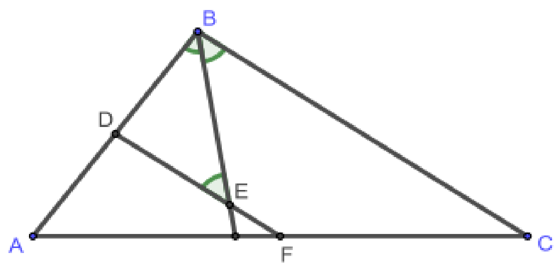
Решение. Пусть сейчас мужу $3x$ лет, а жене – y лет. Когда мужу было y лет, жене было x лет. Так как их возраст изменился одинаково, составим уравнение $y–x=3x–y$. Отсюда $y=2x$, разница в возрасте мужа и жены составляет x лет. Когда жене будет столько же лет, сколько мужу сейчас ($3x$) мужу будет $4x$. Получаем уравнение $3x+4x=63$, $x=9$.

Оценивание. За верное решение 10 баллов.

2. (*12 баллов*) В треугольнике ABC известны длины сторон $BC=10$, $AB=6$. Точка D – середина AB, точка F – середина AC. Биссектриса угла B пересекает отрезок DF в точке E. Найдите EF.

Ответ: 2.

Решение. По условию задачи DF – средняя линия треугольника. Поэтому $DF=BC/2$ и $DF \parallel BC$. Углы CBE и DEB равны как накрест лежащие. Кроме того, $\angle DBE=\angle CBE$, так как BE – биссектриса. Значит, треугольник BDE равнобедренный и $DE=DB=AB/2$.



Поэтому $EF=DF – DE=(BC – AB)/2=2$.

Оценивание. За верное решение 12 баллов.

3. (*14 баллов*) Пусть a и b – натуральные числа, причём $a<1000$. Известно, что a^{21} делится на b^{10}. Верно ли, что a^2 делится на b? Ответ обоснуйте.

Ответ: верно.

Решение. Возьмём произвольный простой делитель p числа b. Он должен быть и делителем числа a (иначе степень a не разделится на степень b). Пусть x и y – наибольшие степени p, на которые делятся соответственно a и b. Тогда

$21x \geq 10y,\ y \leq 2{,}1x$. Так как a<1000, справедливо, что $x \leq 9$ (ведь уже $2^{10} > 1000$).

Итак, $y \leq 2{,}1x \leq 2x + 0{,}1 \cdot 9 = 2x + 0{,}9$. Отсюда $y \leq 2x$. Поскольку это верно для любого простого делителя числа b, получаем, что a^2 делится на b.

Оценивание. За верное решение 14 баллов.

4. (*14 баллов*) При каких значениях параметра a каждое из уравнений $x^2 + ax + 2021 = 0$ и $x^2 + 2021x + a = 0$ имеет два целых корня?

Ответ: – 2022.

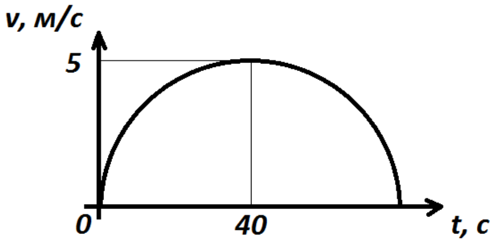
Решение. Предположим, что ни одно из уравнений не имеет корня, равного 1 по абсолютной величине. Пусть x_1 и x_2 – корни первого уравнения. Используя формулы Виета, имеем $|a| = |x_1 + x_2| \leq |x_1| + |x_2|$. (Здесь использовали неравенство треугольника.) Так как $|x_1|, |x_2|$ отличны от 1 и целые, а $|x_1| \cdot |x_2| = 2021$, то наибольшее значение суммы будет, когда одно из них равно 2. Следовательно, $|a| \leq 2 + \frac{2021}{2} = 1012{,}5$.

Пусть t_1 и t_2 – корни второго уравнения. Тогда $|a| = |t_1 \cdot t_2|$. Так как $2021 = |t_1 + t_2| \leq |t_1| + |t_2|$, то при $|t_1| = 2$ получаем, что $|t_2| \geq 2019$. Значит, $|a| \geq 2 \cdot 2019$=4038. Получено противоречие, то есть хотя бы одно из уравнений имеет корень равный 1 по модулю.

Теперь, перебирая все варианты, находим, что a=– 2022.

Оценивание. За верное решение 14 баллов. Если получен правильный ответ, но учащийся без обоснования считает, что корни равны ± 1, то ставим 5 баллов.

5. (*10 баллов*) Зависимость скорости материальной точки от времени представлена на рисунке.



Определите среднюю скорость за первые сорок секунд движения.

Ответ: 3,93 м/с.

Решение. Путь – это площадь под графиком:

$S = \frac{1}{4}\pi \cdot 5 \cdot 40 = 50\pi$. **(5 баллов)**

Средняя скорость: $v_{\text{ср}} = \frac{S}{t} = \frac{50\pi}{40} = 3{,}93$ м/с. **(5 баллов)**

6. (*15 баллов*) Цепочка массой m=500 грамм состоит из большого числа одинаковых, гладких звеньев. Её свободно подвесили за концы к потолку. Угол между потолком и цепочкой равен α=60°. Определите натяжение T цепочки в самой нижней точке. Ускорение свободного падения g=10 м/с^2.

Ответ: 1,4 Н.

Решение. Горизонтальная проекция силы натяжения цепочки в любом месте одинакова. Следовательно, $T = T_\text{в} \cos\alpha,$ **(5 баллов)**

где $T_\text{в}$ – натяжение цепочки в точке соприкосновения с потолком.

Кроме того, $2T_\text{в} \sin\alpha = mg.$ **(5 баллов)**

В результате получаем: $T = \frac{mg}{2} ctg\alpha = \frac{5}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} = 1{,}4$ Н. **(5 баллов)**

7. (*15 баллов*) Точечный источник света, располагающийся на главной оптической оси тонкой собирающей линзы, даёт расходящийся под малым углом α пучок света. После прохождения линзы данный пучок сходится под малым углом β. Определите угол расхождения лучей, если собирающую линзу заменить на такую же по размерам рассеивающую линзу, с такой же по модулю оптической силой.

Ответ: 2α+β.

Решение. Формула тонкой линзы в случае собирающей линзы:

$\frac{1}{F} = \frac{1}{d} + \frac{1}{f_1}$. **(2 балла)**

Формула тонкой линзы в случае рассеивающей линзы:

$-\frac{1}{F} = \frac{1}{d} - \frac{1}{f_2}$. **(2 балла)**

С учётом того, что: $tg\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{\alpha}{2} = \frac{R}{d}$, **(2 балла)**

$tg\left(\frac{\beta}{2}\right) = \frac{\beta}{2} = \frac{R}{f_1}$, **(2 балла)**

$tg\left(\frac{\gamma}{2}\right) = \frac{\gamma}{2} = \frac{R}{f_2}$. **(2 балла)**

Получаем, что: $\gamma = 2\alpha + \beta$. **(5 баллов)**

8. (*10 баллов*) Удельная теплоёмкость тела массой $m = 2$ кг зависит от температуры следующим образом: $c = c_0(1 + \alpha t)$, где $c_0 = 150$ Дж/(кг · °C) – удельная теплоёмкость при 0°C, $\alpha = 0{,}05$ °C^{-1} – температурный коэффициент, t – температура в градусах Цельсия. Определите, какое количество тепла необходимо передать этому телу для того, чтобы нагреть его от 20 °C до 100 °C.

Ответ: 96 кДж.

Решение. Учитывая то, что зависимость удельной теплоёмкости от температуры носит линейный характер, можно рассчитать её среднее значение:

$$c_{cp} = \frac{c_0(1+\alpha t_{\text{Н}})+c_0(1+\alpha t_{\text{К}})}{2} = 600\ \frac{\text{Дж}}{\text{кг}\cdot\text{°C}}.$$ **(5 баллов)**

Искомое количество тепла: $Q = c_{cp} m \Delta t = 600 \cdot 2 \cdot 80 = 96000$ Дж $= 96$ кДж.

(5 баллов)

Вариант 2

1. (*10 баллов*) У семейной пары дни рождения в один и тот же день. При очередном праздновании их общего дня рождения муж заметил, что сейчас ему в пять раз больше лет, чем было его жене тогда, когда ему было столько лет, сколько его жене сейчас. А когда ей будет столько лет, сколько ему сейчас, им обоим вместе будет 84 года. Сколько лет сейчас мужу?

Ответ: 35.

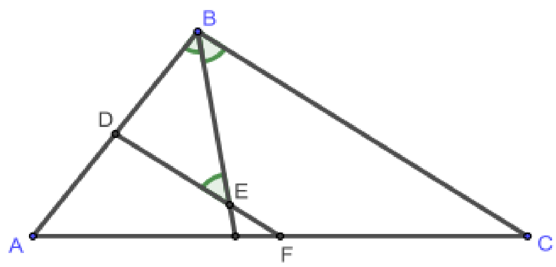
Решение. Пусть сейчас мужу $5x$ лет, а жене – y лет. Когда мужу было y лет, жене было x лет. Так как их возраст изменился одинаково, составим уравнение $y–x=5x–y$. Отсюда $y=3x$, разница в возрасте мужа и жены составляет $2x$ лет. Когда жене будет столько же лет, сколько мужу сейчас ($5x$) мужу будет $7x$. Получаем уравнение $5x+7x=84$, $x=7$.

Оценивание. За верное решение 10 баллов.

2. (*12 баллов*) В треугольнике ABC известны длины сторон $BC=11$, $AB=5$. Точка D – середина AB, точка F – середина AC. Биссектриса угла B пересекает отрезок DF в точке E. Найдите EF.

Ответ: 3.

Решение. По условию задачи DF – средняя линия треугольника. Поэтому $DF=BC/2$ и $DF \parallel BC$. Углы CBE и DEB равны как накрест лежащие. Кроме того, $\angle DBE=\angle CBE$, так как BE – биссектриса. Значит, треугольник BDE равнобедренный и $DE=DB=AB/2$.



Поэтому $EF=DF – DE=(BC – AB)/2=3$.

Оценивание. За верное решение 12 баллов.

3. (*14 баллов*) Пусть a и b – натуральные числа, причём $a<2000$. Известно, что a^{23} делится на b^{11}. Верно ли, что a^2 делится на b? Ответ обоснуйте.

Ответ: верно.

Решение. Возьмём произвольный простой делитель p числа b. Он должен быть и делителем числа a (иначе степень a не разделится на степень b). Пусть x и y – наибольшие степени p, на которые делятся соответственно a и b. Тогда

$23x \geq 11y$, $y \leq 2\frac{1}{11}x$. Так как a<2000, справедливо, что $x \leq 10$ (ведь уже $2^{11} >$ 2000).

Итак, $y \leq 2\frac{1}{11}x \leq 2x + \frac{1}{11} \cdot 10 = 2x + \frac{10}{11}$. Отсюда $y \leq 2x$. Поскольку это верно для любого простого делителя числа b, получаем, что a^2 делится на b.

Оценивание. За верное решение 14 баллов.

4. (*14 баллов*) При каких значениях параметра a каждое из уравнений $x^2 + ax + 2020 = 0$ и $x^2 + 2020x + a = 0$ имеет два целых корня?

Ответ: – 2021.

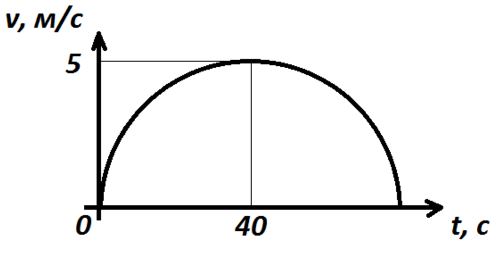
Решение. Предположим, что ни одно из уравнений не имеет корня, равного 1 по абсолютной величине. Пусть x_1 и x_2 – корни первого уравнения. Используя формулы Виета, имеем $|a| = |x_1 + x_2| \leq |x_1| + |x_2|$. (Здесь использовали неравенство треугольника.) Так как $|x_1|, |x_2|$ отличны от 1 и целые, а $|x_1| \cdot |x_2| = 2020$, то наибольшее значение суммы будет, когда одно из них равно 2. Следовательно, $|a| \leq 2 + \frac{2020}{2} = 1012$.

Пусть t_1 и t_2 – корни второго уравнения. Тогда $|a| = |t_1 \cdot t_2|$. Так как $2020 = |t_1 + t_2| \leq |t_1| + |t_2|$, то при $|t_1| = 2$ получаем, что $|t_2| \geq 2018$. Значит, $|a| \geq 2 \cdot 2018$=4036. Получено противоречие, то есть хотя бы одно из уравнений имеет корень равный 1 по модулю.

Теперь, перебирая все варианты, находим, что a=– 2021.

Оценивание. За верное решение 14 баллов. Если получен правильный ответ, но учащийся без обоснования считает, что корни равны ± 1, то ставим 5 балла.

5. (*10 баллов*) Зависимость скорости материальной точки от времени представлена на рисунке.



Определите среднюю скорость за первые восемьдесят секунд движения.

Ответ: 3,93 м/с.

Решение. Путь – это площадь под графиком: $S = \frac{1}{2}\pi \cdot 5 \cdot 40 = 100\pi$.

(5 баллов)

Средняя скорость: $v_{ср} = \frac{S}{t} = \frac{100\pi}{80} = 3{,}93$ м/с. **(5 баллов)**

6. (*15 баллов*) Цепочка массой m=800 грамм состоит из большого числа одинаковых, гладких звеньев. Её свободно подвесили за концы к потолку. Угол между потолком и цепочкой равен α=30°. Определите натяжение T цепочки в самой нижней точке. Ускорение свободного падения g=10 м/с^2.

Ответ: 6,9 Н.

Решение. Горизонтальная проекция силы натяжения цепочки в любом месте одинакова. Следовательно, $T = T_\text{в}\cos\alpha,$ **(5 баллов)**

где $T_\text{в}$ – натяжение цепочки в точке соприкосновения с потолком.

Кроме того, $2T_\text{в}\sin\alpha = mg.$ **(5 баллов)**

В результате получаем: $T = \frac{mg}{2}ctg\alpha = \frac{8}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{1} = 6{,}9$ Н. **(5 баллов)**

7. (*15 баллов*) Точечный источник света, располагающийся на главной оптической оси тонкой собирающей линзы, даёт расходящийся под малым углом α пучок света. После прохождения линзы данный пучок сходится под малым углом β. Определите угол расхождения лучей, если собирающую линзу заменить на такую же по размерам рассеивающую линзу, с такой же по модулю оптической силой.

Ответ: 2α+β.

Решение. Формула тонкой линзы в случае собирающей линзы:

$\frac{1}{F} = \frac{1}{d} + \frac{1}{f_1}.$ **(2 балла)**

Формула тонкой линзы в случае рассеивающей линзы:

$-\frac{1}{F} = \frac{1}{d} - \frac{1}{f_2}.$ **(2 балла)**

С учётом того, что:

$tg\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{\alpha}{2} = \frac{R}{d},$ **(2 балла)**

$tg\left(\frac{\beta}{2}\right) = \frac{\beta}{2} = \frac{R}{f_1},$ **(2 балла)**

$tg\left(\frac{\gamma}{2}\right) = \frac{\gamma}{2} = \frac{R}{f_2}.$ **(2 балла)**

Получаем, что: $\gamma = 2\alpha + \beta.$ **(5 баллов)**

8. (*10 баллов*) Удельная теплоёмкость тела массой $m = 3$ кг зависит от температуры следующим образом: $c = c_0(1 + \alpha t)$, где $c_0 = 200$ Дж/(кг · °C) – удельная теплоёмкость при 0°C, $\alpha = 0{,}05$ °C^{-1} – температурный коэффициент, t – температура в градусах Цельсия. Определите, какое количество тепла необходимо передать этому телу для того, чтобы нагреть его от 20 °C до 100 °C.

Ответ: 192 кДж.

Решение. Учитывая то, что зависимость удельной теплоёмкости от температуры носит линейный характер, можно рассчитать её среднее значение:

$c_{ср} = \frac{c_0(1+\alpha t_{Н})+c_0(1+\alpha t_{К})}{2} = 800\ \frac{Дж}{кг\cdot°C}$. **(5 баллов)**

Искомое количество тепла:

$Q = c_{ср} m\Delta t = 800 \cdot 3 \cdot 80 = 192000$ Дж $= 192$ кДж. **(5 баллов)**