8 класс **Заключительный тур** **2020-2021**

Вариант 1

1. (*10 баллов*) На электронных часах высвечивается время 13:00:07. Через какое минимальное число секунд все цифры на табло часов окажутся разными? Ответ обоснуйте.

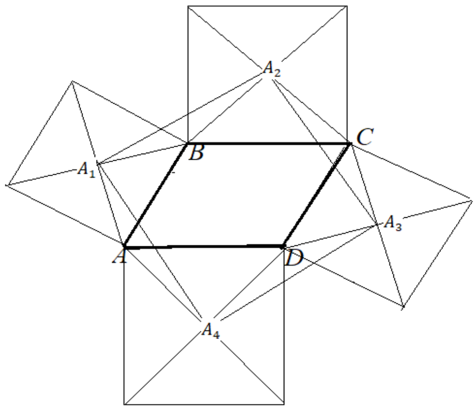
Ответ: через 158 с.

Решение. Пусть все цифры на табло часов окажутся разными в момент времени ab:xy:zt. Мы хотим сделать это время как можно меньше. Придадим первым трём цифрам наименьшие значения: 13:0y:zt. Тогда $y \geq 2$, $z \geq 4$, $t \geq 5$. Значит, первый раз все цифры окажутся различными в 13:02:45. То есть пройдёт 2 мин 38 с или 158 с.

Оценивание. За верное решение 10 баллов, за верный ответ без попытки обоснования 4 балла.

2. (*12 баллов*) На сторонах параллелограмма вне его построены квадраты. Докажите, что точки пересечения диагоналей квадратов являются вершинами одного квадрата.

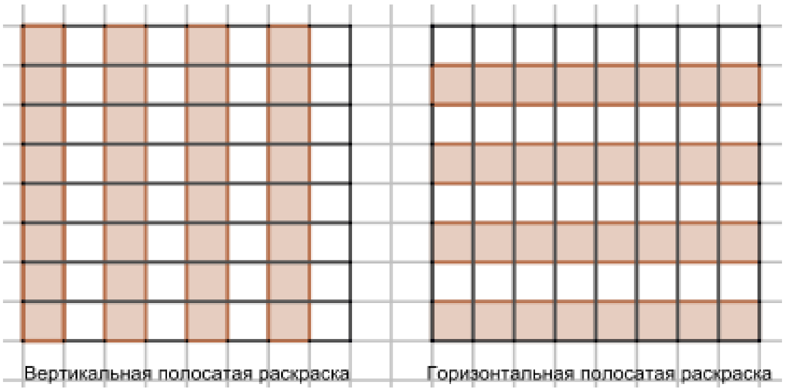
Решение. Пусть *ABCD* – данный параллелограмм, а центры квадратов – A_1, A_2, A_3, A_4. Тогда треугольники $BA_1A_2, CA_2A_3, DA_3A_4, AA_4A_1$ равны по двум сторонам и углу, то есть $A_1A_2 = A_2A_3 = A_3A_4 = A_4A_1$.



Докажем, что углы в четырёхугольнике $A_1A_2A_3A_4$ прямые. Пусть острый угол параллелограмма равен α, а угол $\angle A_1A_4A = \beta$. Тогда $\angle A_1AA_4 = 90^{\circ} + \alpha$, $\angle AA_1A_4 = 90^{\circ} - \alpha - \beta$. Следовательно, $\angle A_4A_1B = \alpha + \beta$, а угол $\angle A_2A_1A_4 = 90^{\circ} - \alpha - \beta + (\alpha + \beta) = 90^{\circ}$. Что и требовалось доказать.

Оценивание. За верное решение 12 баллов. Если доказано, что четырёхугольник – ромб, но ничего не сказано про углы, то 6 баллов.

3. (*14 баллов*) Клетки шахматной доски покрашены в чёрный и белый цвет. Допустима операция: любые три клетки, образующие уголок из трёх клеток, можно перекрасить в противоположный цвет. Можно ли с помощью таких операций перейти от горизонтальной полосатой раскраски к вертикальной полосатой раскраске?



Ответ: можно.

Решение. Покажем, что от любой раскраски можно перейти к любой другой раскраске. Рассмотрим уголки, расположенные внутри квадрата:

a	b
d	c

Если применить операции к уголкам

a	b
	c

	b
d	c

a	
d	c

то окажется, что цвет поменяет только клетка c, а остальные сохранят свой цвет. В роли клетки c может выступать любая клетка поля. Поэтому можно получить любую раскраску.

Оценивание. За верное решение 14 баллов.

4. (*14 баллов*) Найдите все целые решения уравнения

$$x^4 + (x+1)^4 = (x+2)^4.$$

Ответ: –1.

Решение. Перепишем уравнение в виде $(x+1)^4 = (x+2)^4 - x^4$, по формуле разности квадратов получаем

$$(x+1)^4 = ((x+2)^2 - x^2)((x+2)^2 + x^2),$$

$$(x+1)^4 = 8(x+1)((x+1)^2 + 1).$$

Число $(x+1)^2 + 1$ взаимно просто с $(x+1)$, следовательно, $(x+1)^2 + 1 = 1$, то есть $x = -1$.

Оценивание. За верное решение 14 баллов. Если корень угадан, то 2 балла. За недостаточную обоснованность единственности решения снимаем 4 балла.

5. (*10 баллов*) Два литра переохлаждённой до t=–15$^{\text{O}}$С воды резко встряхнули. Определите объём получаемого льда. Плотность льда 900 кг/м^3, воды – 1000 кг/м^3. Удельная теплоёмкость воды 4200 Дж/(кг·$^{\text{O}}$С), удельная теплота плавления льда 3,3·10^5 Дж/кг.

Ответ: 0,42 литра.

Решение. Масса исходной воды: $m = \rho V = 1000 \cdot 2 \cdot 10^{-3} = 2$ кг. **(1 балл)**

Уравнение теплового баланса: $c_{\text{В}} m_{\text{В}}\big(0-(-15)\big) = \lambda m_{\text{Л}}$. **(5 баллов)**

В результате получаем, что масса получающегося льда:

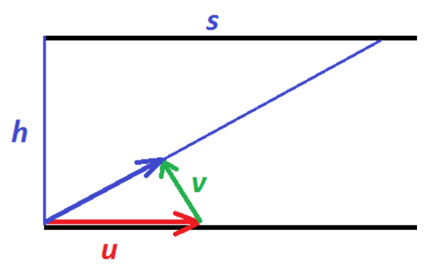
$m_{\text{Л}} = \frac{4200 \cdot 2 \cdot 15}{330000} = \frac{21}{55}$ кг. **(2 балла)**

Его объём: $V = \frac{m_{\text{Л}}}{\rho} \approx 0{,}42$ л. **(2 балла)**

6. (*15 баллов*) Ширина реки 40 метров. Скорость лодки относительно воды постоянна и равна v=2 м/с. С учётом того, что скорость течения u=4 м/с, определите величину минимального сноса вниз по течению лодки при переправе с одного берега на другой.

Ответ: ≈69,3 м.

Решение. Для минимального сноса необходимо, чтобы скорость лодки была направлена перпендикулярно направлению движения лодки относительно берега. **(4 балла)**



В результате, угол между направлением движения лодки и берегом: $\sin\alpha = \frac{v}{u}$ **(4 балла)**

или $\operatorname{tg}\alpha = \frac{h}{s}$. **(4 балла)**

В результате получаем: $S = \frac{H\sqrt{u^2 - v^2}}{v} \approx 69{,}3$ м. **(3 балла)**

7. (*10 баллов*) Под неоднородный тонкий стержень подвели опору и для поддержания равновесия стержня на расстоянии x=10 см от опоры подвесили груз массой m=3 кг и объёмом V=1000 см^3. После установления равновесия под груз подвели стакан с водой, так что груз оказался полностью погруженным в воду. На какое расстояние Δx необходимо передвинуть точку крепления груза, чтобы стержень по-прежнему оказался в равновесии? Плотность воды ρ=1 г/см^3.

Ответ: 5 см.

Решение. Условие равновесия в первом случае: $mg \cdot x = m_{\text{стержня}} g \cdot l$. **(3 балла)**

Условие равновесия в первом случае:

$mg \cdot (x + \Delta x) - \rho g V \cdot (x + \Delta x) = m_{\text{стержня}} g \cdot l.$ **(3 балла)**

В результате получаем: $mg \cdot x = mg \cdot (x + \Delta x) - \rho g V \cdot (x + \Delta x),$ **(2 балла)**

откуда: $\Delta x = 5$ см. **(2 балла)**

8. (*15 баллов*) Два одинаковых резистора сопротивлением R каждый соединены последовательно друг за другом и подключены к источнику постоянного напряжения U. Параллельно одному из резисторов подключили идеальный вольтметр. Его показания оказались равными U_V=10 В. После этого вольтметр заменили идеальным амперметром. Показания амперметра – I_A=10 А. Определите значение R.

Ответ: 2 Ом.

Решение. Напряжение источника: $U = U_V + U_V = 20$ В. **(4 балла)**

У идеального амперметра сопротивление: $r_A = 0$ Ом. **(3 балла)**

Следовательно, сопротивление резистора: $R = \frac{U}{I_A} = \frac{20}{10} = 2$ Ом. **(3 балла)**

Вариант 2

1. (*10 баллов*) На электронных часах высвечивается время 23:11:15. Через какое минимальное число секунд все цифры на табло часов окажутся разными? Ответ обоснуйте.

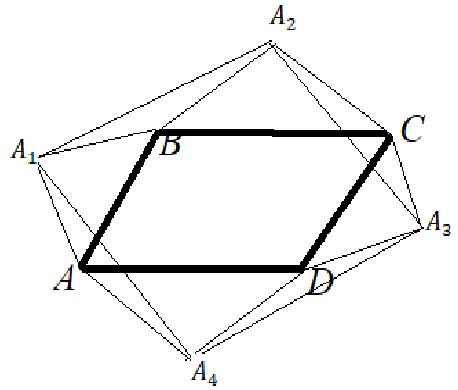
Ответ: через 170 с.

Решение. Пусть все цифры на табло часов окажутся разными в момент времени ab:xy:zt. Мы хотим сделать это время как можно меньше. Придадим первым трём цифрам наименьшие значения: 23:1y:zt. Тогда $y \geq 4$, $z \geq 0$, $t \geq 5$. Значит, первый раз все цифры окажутся различными в 23:14:05. То есть пройдёт 2 мин 50 с или 170 с.

Оценивание. За верное решение 10 баллов, за верный ответ без попытки обоснования 4 балла.

2. (*12 баллов*) На сторонах параллелограмма вне его построены равнобедренные прямоугольные треугольники, у которых гипотенуза – соответствующая сторона параллелограмма. Докажите, что вершины прямых углов этих треугольников являются вершинами одного квадрата.

Решение. Пусть $ABCD$ – данный параллелограмм, а вершины прямых углов равнобедренных треугольников – A_1, A_2, A_3, A_4. Тогда треугольники BA_1A_2, CA_2A_3, DA_3A_4, AA_4A_1 равны по двум сторонам и углу, то есть $A_1A_2 = A_2A_3 = A_3A_4 = A_4A_1$.



Докажем, что углы в четырёхугольнике $A_1A_2A_3A_4$ прямые. Пусть острый угол параллелограмма равен α, а угол $\angle A_1A_4A = \beta$. Тогда $\angle A_1AA_4 = 90^o + \alpha$, $\angle AA_1A_4 = 90^o - \alpha - \beta$. Следовательно, $\angle A_4A_1B = \alpha + \beta$, а угол $\angle A_2A_1A_4 = 90^o - \alpha - \beta + (\alpha + \beta) = 90^o$. Что и требовалось доказать.

Оценивание. За верное решение 12 баллов. Если доказано, что четырёхугольник – ромб, но ничего не сказано про углы, то 6 баллов.

3. (*14 баллов*) Клетки шахматной доски покрашены в чёрный и белый цвет. Допустима операция: любые три клетки, образующие уголок из трёх клеток, можно перекрасить в противоположный цвет. Можно ли с помощью таких операций перейти от традиционной (шахматной) раскраски доски к вертикальной полосатой раскраске?

Ответ: можно.

Решение. Покажем, что от любой раскраски можно перейти к любой другой раскраске. Рассмотрим уголки, расположенные внутри квадрата:

a	b
d	c

Если применить операции к уголкам

a	b
	c

	b
d	c

a	
d	c

то окажется, что цвет поменяет только клетка c, а остальные сохранят свой цвет. В роли клетки c может выступать любая клетка поля. Поэтому можно получить любую раскраску.

Оценивание. За верное решение 14 баллов.

4. (*14 баллов*) Найдите все целые решения уравнения

$$(x+1)^4+(x+2)^4=(x+3)^4.$$

Ответ: –2.

Решение. Перепишем уравнение в виде $(x+2)^4=(x+3)^4-(x+1)^4$, по формуле разности квадратов получаем

$$(x+2)^4=((x+3)^2-(x+1)^2)((x+3)^2+(x+1)^2),$$

$$(x+2)^4=8(x+2)((x+2)^2+1).$$

Число $(x+2)^2+1$ взаимно просто с $(x+2)$, следовательно, $(x+2)^2+1=1$, то есть $x=-2$.

Оценивание. За верное решение 14 баллов. Если корень угадан, то 2 балла. За недостаточную обоснованность единственности решения снимаем 4 балла.

5. (*10 баллов*) Три литра переохлаждённой до t=–20^{O}C воды резко встряхнули. Определите объём получаемого льда. Плотность льда 900 кг/м^3, воды – 1000 кг/м^3. Удельная теплоёмкость воды 4200 Дж/(кг·^{O}С), удельная теплота плавления льда 3,3·10^5 Дж/кг.

Ответ: 0,85 литра.

Решение. Масса исходной воды: $m = \rho V = 1000 \cdot 3 \cdot 10^{-3} = 3$ кг. **(1 балл)**

Уравнение теплового баланса: $c_{\text{В}} m_{\text{В}} \big(0 - (-20)\big) = \lambda m_{\text{Л}}$, **(5 баллов)**

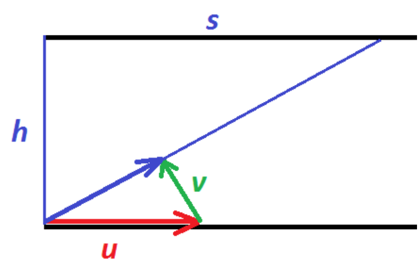
В результате получаем, что масса получающегося льда: $m_{Л} = \frac{4200 \cdot 3 \cdot 20}{330000} = \frac{42}{55}$ кг. **(2 балла)**

Его объём: $V = \frac{m_{Л}}{\rho} \approx 0{,}85$ л. **(2 балла)**

6. (*15 баллов*) Ширина реки 50 метров. Скорость лодки относительно воды постоянна и равна *v*=1 м/с. С учётом того, что скорость течения *u*=3 м/с, определите величину минимального сноса вниз по течению лодки при переправе с одного берега на другой.

Ответ: ≈141,4 м.

Решение. Для минимального сноса необходимо, чтобы скорость лодки была направлена перпендикулярно направлению движения лодки относительно берега. **(4 балла)**



В результате, угол между направлением движения лодки и берегом: $\sin\alpha = \frac{v}{u}$ **(4 балла)**

или $\operatorname{tg}\alpha = \frac{h}{s}$. **(4 балла)**

В результате получаем: $S = \frac{H\sqrt{u^2 - v^2}}{v} \approx 141{,}4$ м. **(3 балла)**

7. (*10 баллов*) Под неоднородный тонкий стержень подвели опору и для поддержания равновесия стержня на расстоянии *x*=6 см от опоры подвесили груз массой *m*=4 кг и объёмом *V*=1000 см^3. После установления равновесия под груз подвели стакан с водой, так что груз оказался полностью погруженным в воду. На какое расстояние Δ*x* необходимо передвинуть точку крепления груза, чтобы стержень по-прежнему оказался в равновесии? Плотность воды *ρ*=1 г/см^3.

Ответ: 2 см.

Решение. Условие равновесия в первом случае: $mg \cdot x = m_{\text{стержня}} g \cdot l$. **(3 балла)**

Условие равновесия в первом случае:

$mg \cdot (x + \Delta x) - \rho g V \cdot (x + \Delta x) = m_{\text{стержня}} g \cdot l.$ **(3 балла)**

В результате получаем: $mg \cdot x = mg \cdot (x + \Delta x) - \rho g V \cdot (x + \Delta x)$, **(2 балла)**

откуда: $\Delta x = 2$ см. **(2 балла)**

8. (*15 баллов*) Два одинаковых резистора сопротивлением R каждый соединены последовательно друг за другом и подключены к источнику постоянного напряжения U. Параллельно одному из резисторов подключили идеальный вольтметр. Его показания оказались равными U_V=5 В. После этого вольтметр заменили идеальным амперметром. Показания амперметра – I_A=4 А. Определите значение R.

Ответ: 2,5 Ом.

Решение. Напряжение источника: $U = U_V + U_V = 10$ В. **(4 балла)**

У идеального амперметра сопротивление: $r_A = 0$ Ом. **(3 балла)**

Следовательно, сопротивление резистора: $R = \frac{U}{I_A} = \frac{10}{4} = 2{,}5$ Ом. **(3 балла)**