



1. (12 баллов) На электронных часах высвечивается время 13:00:07. Через какое минимальное число секунд все цифры на табло часов окажутся разными? Ответ обоснуйте.

Ответ: через 158 с.

Решение. Пусть все цифры на табло часов окажутся разными в момент времени $ab:xy:zt$. Мы хотим сделать это время как можно меньше. Придадим первым трём цифрам наименьшие значения: $13:0y:zt$. Тогда $y \geq 2$, $z \geq 4$, $t \geq 5$. Значит, первый раз все цифры окажутся различными в 13:02:45. То есть пройдёт 2 мин 38 с или 158 с.

Оценивание. За верное решение 12 баллов, за верный ответ без попытки обоснования 5 баллов.

2. (12 баллов) В понедельник в школьную библиотеку пришло 9 человек, во вторник – 8, в среду – 11, в четверг – 7, в пятницу – 10. Никто из учеников не был в библиотеке два дня подряд. Какое наименьшее количество учеников побывало в библиотеке с понедельника по пятницу?

Ответ: 19.

Решение. Во вторник и среду было 19 человек. Никто не ходил в библиотеку два дня подряд. Следовательно, учеников, посетивших библиотеку не меньше 19. Приведем пример посещения библиотеки 19 учениками. Занумеруем учеников от 1 до 19. Пусть в понедельник пришли ученики с 1 по 9; во вторник – с 10 по 17; в среду – с 1 по 9, 18, 19; в четверг – с 10 по 16; в пятницу – с 1 по 9 и 18. Конечно, подобный пример – не единственный.

Оценивание. За верное решение 12 баллов. Если приведена только оценка – 8 баллов. За верный ответ без попытки обоснования 3 балла.

3. (13 баллов) Клетки таблицы 3×3 были заполнены нулями. Можно взять любой квадрат 2×2 и к числам, записанным в его клетках прибавить по единице. Петя выполнил несколько таких операций и получил новую таблицу. Вася стёр некоторые числа, получилась таблица:

7	12	
16		
9	10	

Восстановите числа, которые стёр Вася. Не забудьте объяснить, как получен ответ.

Ответ:

7	12	5
16	22	6
9	10	1

Решение. Видно, что к левому верхнему квадрату операция применялась 7 раз. Если к правому верхнему квадрату операция применялась x раз, то во второй клетке верхней строки должно быть число $7+x$. Отсюда $x=5$. Аналогично находим число в правой нижней клетке, а затем и в двух оставшихся. (Дети должны писать более подробно!)

Оценивание. За верное решение 12 баллов, за верный ответ без пояснений 6 баллов.

4. (13 баллов) Сколько месяцев в не високосном году может иметь ровно 4 четверга? В год, когда таких месяцев наименьшее число, какой день недели в старый Новый год – 14 января? (Не високосный год имеет 365 дней)

Ответ: 7 или 8 месяцев; среда.

Решение. В году 12 месяцев, 52 полных и одна неполная неделя (из одного дня). Если этот день четверг (31-е декабря и, следовательно, первое января этого года), то всего 53 четверга в году (в каждую из 52-х полных недель один четверг плюс этот четверг). Если бы в каждом месяце было бы ровно по 4 четверга, то четвергов было бы $4 \times 12 = 48$. Следовательно, $53 - 48 = 5$ месяцев имеют по «лишнему», пятому четвергу, а семь месяцев – четыре четверга. Так как 1-е января – четверг, то 14 января – среда.

Если же неполная неделя – не четверг, то всего 52 четверга в году (столько, сколько полных недель), $52 - 48 = 4$ месяца имеют по «лишнему», пятому четвергу, а восемь месяцев – четыре четверга.

Оценивание. Правильный 1-й или 2-й ответ (без решения) – по одному баллу (всего 2 балла). Правильное решение для количества месяцев – 7 баллов. Всё правильно решено – 13 баллов.

5. (15 баллов) За десять минут расстояние между двумя пешеходами сократилось с 1000 до 200 метров. Какое расстояние будет между ними ещё через десять минут. Оба пешехода идут с постоянной скоростью, вдоль одной прямой, не меняя направления своего движения.

Ответ: 600 или 1400 метров.

Решение. Свяжем систему отсчёта с одним из пешеходов. Возможны два варианта. **(1 балл)**

Первый вариант: второй пешеход в данной системе отсчёта не успел дойти до первого. То есть прошёл за 10 минут 800 метров. **(3 балла)**

Следовательно, за следующие 10 минут он пройдёт ещё 800 метров. И расстояние между ними будет равно 600 метрам. **(4 балла)**

Второй вариант: второй пешеход в данной системе отсчёта успел пройти мимо первого. То есть он прошёл за 10 минут 1200 метров. **(3 балла)**

Следовательно, за следующие 10 минут он пройдет еще 1200 метров. И расстояние между ними будет равно 1400 метрам. **(4 балла)**

6. (15 баллов) Скорость автомобиля по пути из города в деревню оказалась в два раза больше его скорости при движении в обратном направлении. При этом средняя скорость за всё время движения оказалась равной 42 км/ч. Найдите скорость автомобиля при движении из города в деревню.

Ответ: 63 км/ч.

Решение. Средняя скорость: $v_{\text{cp}} = \frac{s+s}{t_1+t_2}$, (5 баллов)

где $t_1 = \frac{s}{v}$ – время поездки из города в деревню, $t_2 = \frac{2s}{v}$ – время поездки из деревни в город. (5 баллов)

Получаем: $v = \frac{3v_{\text{cp}}}{2} = 63$ км/ч. (5 баллов)

7. (10 баллов) Велосипедист 20 минут ехал со скоростью 18 км/ч, затем 600 секунд стоял на месте и отдыхал. После этого в течение часа шёл пешком со скоростью 3,6 км/ч. Определите его среднюю скорость.

Ответ: 1,8 м/с или 6,4 км/ч.

Решение. На первом участке пройдено:
 $s_1 = v_1 t_1 = 5 \cdot 20 \cdot 60 = 6000$ м или $18 \cdot \frac{1}{3} = 6$ км.

(3 балла)

На последнем участке: $s_3 = v_3 t_3 = 1 \cdot 3600 = 3600$ м или $3,6 \cdot 1 = 3,6$ км.

(3 балла)

Средняя скорость:

$v_{\text{cp}} = \frac{s_1+s_2+s_3}{t_1+t_2+t_3} = \frac{6000+0+3600}{1200+600+3600} \approx 1,8$ м/с или $\frac{6+0+3,6}{\frac{1}{3}+\frac{1}{6}+1} = 6,4$ км/ч. (4 балла)

8. (10 баллов) Аквариум в форме прямоугольного параллелепипеда имеет следующие размеры: длина – 3 м, ширина – 200 мм, высота – 80 см. Его заполняют водой со скоростью 2 литра в минуту. Через сколько минут после начала заполнения аквариума он окажется заполненным полностью?

Ответ: 240 минут.

Решение. Объём аквариума: $V = 3 \cdot 0,2 \cdot 0,8 = 0,48$ м³. (3 балла)

Скорость заполнения: $v = \frac{0,002 \text{ м}^3}{1 \text{ мин}}$. (3 балла)

Аквариум полностью заполнится через: $t = \frac{V}{v} = \frac{0,48}{0,002} = 240$ мин. (4 балла)



1. (12 баллов) На электронных часах высвечивается время 23:11:15. Через какое минимальное число секунд все цифры на табло часов окажутся разными? Ответ обоснуйте.

Ответ: через 170 с.

Решение. Пусть все цифры на табло часов окажутся разными в момент времени $ab:xy:zt$. Мы хотим сделать это время как можно меньше. Придадим первым трём цифрам наименьшие значения: $23:1y:zt$. Тогда $y \geq 4$, $z \geq 0$, $t \geq 5$. Значит, первый раз все цифры окажутся различными в 23:14:05. То есть пройдёт 2 мин 50 с или 170 с.

Оценивание. За верное решение 12 баллов, за верный ответ без попытки обоснования 5 баллов.

2. (12 баллов) В понедельник в школьную библиотеку пришло 8 человек, во вторник – 9, в среду – 11, в четверг – 7, в пятницу – 11. Никто из учеников не был в библиотеке два дня подряд. Какое наименьшее количество учеников побывало в библиотеке с понедельника по пятницу?

Ответ: 20.

Решение. Во вторник и среду было 20 человек. Никто не ходил в библиотеку два дня подряд. Следовательно, учеников, посетивших библиотеку не меньше 20. Приведем пример посещения библиотеки 20 учениками. Занумеруем учеников от 1 до 20. Пусть в понедельник пришли ученики с 1 по 8; во вторник – с 9 по 17; в среду – с 1 по 8, 18, 19, 20; в четверг – с 9 по 15; в пятницу – с 1 по 8, 16, 17, 18. Конечно, подобный пример – не единственный.

Оценивание. За верное решение 12 баллов. Если приведена только оценка – 8 баллов. За верный ответ без попытки обоснования 3 балла.

3. (13 баллов) Клетки таблицы 3×3 были заполнены нулями. Можно взять любой квадрат 2×2 и к числам, записанным в его клетках прибавить по единице. Петя выполнил несколько таких операций и получил новую таблицу. Вася стёр некоторые числа, получилась таблица:

5	14	
16		
11	13	

Восстановите числа, которые стёр Вася. Не забудьте объяснить, как получен ответ.

Ответ:

5	14	9
16	27	11
11	13	2

Решение. Видно, что к левому верхнему квадрату операция применялась 5 раз. Если к правому верхнему квадрату операция применялась x раз, то во второй клетке верхней строки должно быть число $5+x$. Отсюда $x=9$. Аналогично находим число в правой нижней клетке, а затем и в двух оставшихся. (Дети должны писать более подробно!)

Оценивание. За верное решение 12 баллов, за верный ответ без пояснений 6 баллов.

4. (13 баллов) Сколько месяцев в не високосном году может иметь ровно 5 пятниц? В год, когда таких месяцев наибольшее число, какой день недели в Рождество – 7 января? (Не високосный год имеет 365 дней)

Ответ: 4 или 5 месяцев; четверг.

Решение. В году 12 месяцев, 52 полных и одна неполная неделя (из одного дня). Если этот день пятница (31-е декабря и, следовательно, первое января этого года), то всего 53 пятницы в году (в каждую из 52-х полных недель одна пятница плюс эта пятница). Если бы в каждом месяце было бы ровно по 4 пятницы, то пятниц было бы $4 \times 12 = 48$. Следовательно, $53 - 48 = 5$ месяцев имеют по «лишней», пятой пятнице, а семь месяцев – четыре пятницы. Так как 1-е января – пятница, то 7 января – четверг.

Если же неполная неделя – не пятница, то всего 52 пятницы в году (столько, сколько полных недель). $52 - 48 = 4$ месяца имеют по «лишней», пятой пятнице.

Оценивание. Правильный 1-й или 2-й ответ (без решения) – по одному баллу (всего 2 балла). Правильное решение для количества месяцев – 7 баллов. Всё правильно решено – 13 баллов.

5. (15 баллов) За пять минут расстояние между двумя пешеходами сократилось с 400 до 100 метров. Какое расстояние будет между ними ещё через пять минут. Оба пешехода идут с постоянной скоростью, вдоль одной прямой, не меняя направления своего движения.

Ответ: 200 или 600 метров.

Решение. Свяжем систему отсчёта с одним из пешеходов. Возможны два варианта. **(1 балл)**

Первый вариант: второй пешеход в данной системе отсчёта не успел дойти до первого. То есть прошёл за 5 минут 300 метров. **(3 балла)**

Следовательно, за следующие 5 минут он пройдёт ещё 300 метров. И расстояние между ними будет равно 200 метрам. **(4 балла)**

Второй вариант: второй пешеход в данной системе отсчёта успел пройти мимо первого. То есть он прошёл за 5 минут 500 метров. **(3 балла)**

Следовательно, за следующие 5 минут он пройдёт ещё 500 метров. И расстояние между ними будет равно 600 метрам. **(4 балла)**

6. (15 баллов) Скорость автомобиля по пути из города в деревню оказалась в три раза больше его скорости при движении в обратном направлении. При этом средняя скорость за всё время движения оказалась равной 36 км/ч. Найдите скорость автомобиля при движении из города в деревню.

Ответ: 72 км/ч.

Решение. Средняя скорость: $v_{\text{cp}} = \frac{s+s}{t_1+t_2}$, (5 баллов)

где $t_1 = \frac{s}{v}$ – время поездки из города в деревню, $t_2 = \frac{3s}{v}$ – время поездки из деревни в город. (5 баллов)

Получаем: $v = 2v_{\text{cp}} = 72$ км/ч. (5 баллов)

7. (10 баллов) Велосипедист 1200 секунд ехал со скоростью 9 км/ч, затем 10 минут стоял на месте и отдыхал. После этого в течение полутора часов шёл пешком со скоростью 3,6 км/ч. Определите его среднюю скорость.

Ответ: 1,2 м/с или 4,2 км/ч.

Решение. На первом участке пройдено:
 $s_1 = v_1 t_1 = 2,5 \cdot 1200 = 3000$ м или $9 \cdot \frac{1}{3} = 3$ км.

(3 балла)

На последнем участке: $s_3 = v_3 t_3 = 1 \cdot 5400 = 5400$ м или $3,6 \cdot 1,5 = 5,4$ км.

(3 балла)

Средняя скорость:

$$v_{\text{cp}} = \frac{s_1+s_2+s_3}{t_1+t_2+t_3} = \frac{3000+0+5400}{1200+600+5400} \approx 1,2 \text{ м/с или } \frac{3+0+5,4}{\frac{1}{3}+\frac{1}{6}+1,5} = 4,2 \text{ км/ч. (4 балла)}$$

8. (10 баллов) Аквариум в форме прямоугольного параллелепипеда имеет следующие размеры: длина – 1,5 м, ширина – 400 мм, высота – 60 см. Его заполняют водой со скоростью 3 литра в минуту. Через сколько минут после начала заполнения аквариума он окажется заполненным полностью?

Ответ: 120 минут.

Решение. Объём аквариума: $V = 1,5 \cdot 0,4 \cdot 0,6 = 0,36 \text{ м}^3$. (3 балла)

Скорость заполнения: $v = \frac{0,003 \text{ м}^3}{1 \text{ мин}}$. (3 балла)

Аквариум полностью заполнится через: $t = \frac{V}{v} = \frac{0,36}{0,003} = 120$ мин. (4 балла)