Вариант 1

1. (*12 баллов*) Найдите наименьшее натуральное значение n, удовлетворяющее уравнению $\sin n^o = \sin(2021n)^o$.

Ответ: 18.

Решение. Данное уравнение равносильно совокупности уравнений $\left[\begin{array}{l}\sin\left(\frac{2021n-n}{2}\right)^{\text{o}} = 0;\\ \cos\left(\frac{2021n+n}{2}\right)^{\text{o}} = 0.\end{array}\right.$ Получаем $\left[\begin{array}{l}(1010n)^{\text{o}} = 180^{\text{o}}\cdot k;\\ (1011n)^{\text{o}} = 90^{\text{o}}+180^{\text{o}}\cdot m,\end{array}\right.$ где $k,m \in$ **N**. Далее $\left[\begin{array}{l}101n = 18k,\\ 337n = 30(2m+1).\end{array}\right.$ Так как 101 и 337 – простые числа, то в первом уравнении наименьшее n=18, а во втором – наименьшее значение n=30.

Оценивание. За верное решение 12 баллов.

2. (*12 баллов*) В правильной четырёхугольной пирамиде *ABCDS* площадь основания совпадает с площадью боковой грани и равна 1. *M* – точка пересечения медиан грани *CDS*. Точка *N* лежит на прямой *AM* и *AN*:*NM*=3:4. Найдите сумму расстояний от точки *N* до всех граней пирамиды.

Ответ: $\sqrt{15}/2$.

Решение. Из условия задачи сторона основания пирамиды равна 1, апофема боковой грани – 2. Тогда высота пирамиды $h = \sqrt{4-\frac{1}{4}}=\frac{\sqrt{15}}{2}$. Объём пирамида *ABCDS* равен $V = \frac{\sqrt{15}}{6}$.

С другой стороны, объём пирамиды можно найти как сумму объёмов пяти пирамид, вершина которых – точка *N*, а основания – грани пирамиды *ABCDS*. Тогда $V = \frac{1}{3}(h_1 + h_2 + h_3 + h_4 + h_5)$, где h_1, h_2, h_3, h_4, h_5 – расстояния от точки *N* до граней пирамиды *ABCDS* (или высоты маленьких пирамид). Приравнивая объёмы, получаем ответ. Заметим, что сумма расстояний не зависит от расположения точки внутри данной пирамиды.

Оценивание. Если правильно найдена высота пирамиды, то 2 балла. Найдены правильно отдельно расстояния до граней – по 2 балла за каждое. За верное решение – 12 баллов.

3. (*12 баллов*) В зависимости от параметра $a > 1$ найдите решение системы

$$\begin{cases}\sqrt{x^2-1}\sqrt{y^2-1} = a^2-1,\\ y^{(x-a)^2} = \left(\dfrac{x}{y}\right)^{\log_x y-1}.\end{cases}$$

Ответ: x=y=a.

Решение. Из первого уравнения получим, что переменные больше 1 (отрицательные отпадают сразу). Логарифмируем второе уравнение по основанию *y*:

$$\log_y y^{(x-a)^2} = \log_y \left(\frac{x}{y}\right)^{\log_x y - 1}.$$

Получаем: $(x-a)^2 = (\log_x y - 1)\log_y\left(\frac{x}{y}\right) = (\log_x y - 1)\left(\log_y x - 1\right)$. В правой части – неположительное число, значит $x=y$ и $x=a$.

Оценивание. За верное решение 12 баллов. Если ответ угадан, то 2 балла.

4. (*14 баллов*) В бесконечной последовательности цифр 2, 0, 1, 9, … каждая цифра, начиная с пятой, равна последней цифре суммы предшествующих четырёх цифр этой последовательности. Встретятся ли в этой последовательности:

а) подряд числа 4, 3, 2, 1; *б*) вторично четвёрка 2, 0, 1, 9 (в этом же порядке)?

Ответ: *а*) нет; *б*) да.

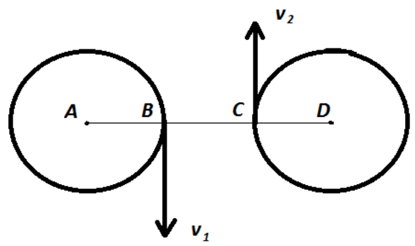
Решение. *а*) Будем записывать только чётности (чётная – пишем Ч, нечётная – Н) цифр этой последовательности, начиная с пятой. Получим:

Ч, Ч, Ч, Н, Н, Ч, Ч, Ч, Н, Н, Ч, Ч, Ч, Н,… и т.д. Последовательность чётностей данной последовательности 4, 3, 2, 1 имеет вид Ч, Н, Ч, Н, и её нет в этом ряде.

б) Рассмотрим упорядоченные четвёрки из всевозможных цифр. На каждое место в такой четвёрке можно поставить любую из 10 цифр. Значит, всего разных четвёрок существует 10^4. Возьмём начало данной нам последовательности, содержащее 10^4+4 цифры. Из неё можно выбрать 10^4+1 четвёрку цифр, идущих в ней подряд. Так как всего таких **разных** четвёрок 10^4, то (по принципу Дирихле) из этих 10^4+1 четверок есть хотя бы две одинаковые. Пусть это $a_k, a_{k+1}, a_{k+2}, a_{k+3}$ и $a_m, a_{m+1}, a_{m+2}, a_{m+3}$ ($k<m$). В них, как мы заметили, $a_k = a_m$, $a_{k+1} = a_{m+1}$, $a_{k+2} = a_{m+2}$, $a_{k+3} = a_{m+3}$. Данная последовательность построена так, что по четырём её идущим подряд элементам $a_k, a_{k+1}, a_{k+2}, a_{k+3}$ предыдущий элемент a_{k-1} ими однозначно определяется по формуле: $a_{k-1} = a_{k+3} - a_k - a_{k+1} - a_{k+2}$ (равенство по модулю 10). Тогда $a_{k-1} = a_{m-1}$. Это значит, что если равны 2 четвёрки $a_k, a_{k+1}, a_{k+2}, a_{k+3}$ и $a_m, a_{m+1}, a_{m+2}, a_{m+3}$, то равны 2 предыдущие четвёрки $a_{k-1}, a_k, a_{k+1}, a_{k+2}$ $a_{m-1}, a_m, a_{m+1}, a_{m+2}$. Тогда, двигаясь по данной последовательности влево, к её началу, получим, что a_1, a_2, a_3, a_4 совпадает с $a_{m-k+1}, a_{m-k+2}, a_{m-k+3}, a_{m-k+4}$. Это требовалось доказать, так как эти последовательности разные ($k<m$).

Оценивание. За верное доказательство пункта *а*) – 6 баллов, за верное решение пункта *б*) – 8 баллов.

5. (*10 баллов*) Два автомобиля двигаются по окружностям одинакового радиуса с одинаковыми по модулю скоростями $v_1 = v_2 = v$. Известно, что $AB=BC=CD=R$. Определите скорость v_{21} второго автомобиля в системе отсчёта, связанной с первым автомобилем в момент времени, указанный на рисунке.



Ответ: $3v$.

Решение. Переносная скорость точки C в системе отсчёта, связанной с первым автомобилем: $v_C = \frac{AC}{AB} v_1 = 2v$. **(5 баллов)**

При этом она направлена вертикально вниз. Следовательно, скорость второго автомобиля в системе отсчёта, связанной с первым:

$$v_{21} = v_2 + v_C = v + 2v = 3v.$$ **(5 баллов)**

6. (*15 баллов*) К колесу радиусом R=0,1 м с горизонтально расположенной осью прикрепили на ободе маленький грузик массой m=1 кг. Найдите массу колеса M, предполагая её однородно распределённой по ободу, если частота малых колебаний колеса вокруг оси равна ω=5 рад/с. Ускорение свободного падения g=10 м/с^2.

Ответ: 3 кг.

Решение. Выведем колёса из положения равновесия на угол α. Закон сохранения полной механической энергии:

$$mgR(1 - \cos\alpha) + \frac{mv^2}{2} + \frac{MR^2\omega^2}{2} = const.$$ **(5 баллов)**

С учётом того, что $v=\omega R$, продифференцируем это выражение по времени:

$$mgR\sin\alpha \cdot \omega + \frac{mR^2}{2} 2\omega \cdot \varepsilon + \frac{MR^2}{2} 2\omega \cdot \varepsilon = 0.$$ **(5 баллов)**

Так как для малых углов $\sin\alpha \approx \alpha$, то получаем, что частота малых колебаний:

$$\omega = \sqrt{\frac{mg}{R(m+M)}}\,.$$ **(3 балла)**

В результате масса колеса: $M = \frac{mg}{\omega^2 R} - m = \frac{1\cdot 10}{5^2\cdot 0{,}1} - 1 = 3$ кг . **(2 балла)**

7. (*15 баллов*) Два моля идеального газа находятся в цилиндрическом вертикальном сосуде под лёгким поршнем. Известно, что при изменении температуры газа от 27°C до 127 °C местоположение поршня не меняется. Определите объём занимаемый газом в этом температурном интервале. Атмосферное давление 10^5 Па.

Ответ: 0,058 м^3.

Решение. Условия равновесия для начального и конечного состояний газа:

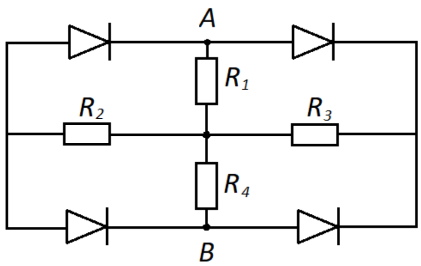
$p_a S + F_{\text{тр}} = p_1 S,$ **(4 балла)**

$p_a S - F_{\text{тр}} = p_2 S.$ **(4 балла)**

В результате получаем: $2p_a = p_1 + p_2 = \frac{\vartheta R}{V}(T_1 + T_2).$ **(3 балла)**

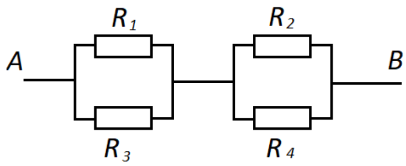
$V = \frac{\vartheta R}{2p_a}(T_1 + T_2) = \frac{2\cdot 8{,}31\cdot(300+400)}{2\cdot 10^5} \approx 0{,}058$ м^3. **(4 балла)**

8. (*10 баллов*) В изображённой на рисунке электрической схеме сопротивления резисторов R_1=1 Ом, R_2=2 Ом, R_3=3 Ом, и R_4=4 Ом. Считайте, что сопротивления всех диодов в прямом направлении пренебрежимо малы, а в обратном направлении равны бесконечности. Определите сопротивление всей схемы между точками A и B в ситуации, когда к точке A подключают положительный полюс источника тока, а к точке B – отрицательный. Сопротивление соединительных проводов пренебрежимо мало.



Ответ: ≈2,08 Ом.

Решение. В предложенной ситуации получается следующая эквивалентная схема: **(5 баллов)**



Её общее сопротивление: $R = \frac{R_1 R_3}{R_1+R_3} + \frac{R_2 R_4}{R_2+R_4} = \frac{1\cdot 3}{1+3} + \frac{2\cdot 4}{2+4} = \frac{25}{12} \approx 2{,}08$ Ом. **(5 баллов)**

Вариант 2

1. (*12 баллов*) Найдите наименьшее натуральное значение n, удовлетворяющее уравнению $\sin n^{o} + \sin(2021n)^{o} = 0$.

Ответ: 9.

Решение. Данное уравнение равносильно совокупности уравнений $\left[\begin{array}{l}\sin\left(\frac{2021n+n}{2}\right)^{\mathrm{o}} = 0; \\ \cos\left(\frac{2021n-n}{2}\right)^{\mathrm{o}} = 0.\end{array}\right.$ Получаем $\left[\begin{array}{l}(1011n)^{\mathrm{o}} = 180^{\mathrm{o}} \cdot k; \\ (1010n)^{\mathrm{o}} = 90^{\mathrm{o}} + 180^{\mathrm{o}} \cdot m,\end{array}\right.$ где $k, m \in$ **N**. Далее $\left[\begin{array}{l}337n = 60k, \\ 101n = 9(2m+1).\end{array}\right.$ Так как 101 и 337 – простые числа, то в первом уравнении наименьшее n=60, а во втором – наименьшее значение n=9.

Оценивание. За верное решение 12 баллов.

2. (*12 баллов*) В правильной четырёхугольной пирамиде *ABCDS* площадь основания совпадает с площадью боковой грани и равна 4. *M* – точка пересечения медиан грани *CDS*. Точка *N* лежит на прямой *AM* и *AN*:*NM*=2:3. Найдите сумму расстояний от точки *N* до всех граней пирамиды.

Ответ: $\sqrt{15}$.

Решение. Из условия задачи сторона основания пирамиды равна 2, апофема боковой грани – 4. Тогда высота пирамиды $h = \sqrt{16-1} = \sqrt{15}$. Объём пирамида *ABCDS* равен $V = \frac{4\sqrt{15}}{3}$.

С другой стороны, объём пирамиды можно найти как сумму объёмов пяти пирамид, вершина которых – точка *N*, а основания – грани пирамиды *ABCDS*. Тогда $V = \frac{4}{3}(h_1 + h_2 + h_3 + h_4 + h_5)$, где h_1, h_2, h_3, h_4, h_5 – расстояния от точки *N* до граней пирамиды *ABCDS* (или высоты маленьких пирамид). Приравнивая объёмы, получаем ответ. Заметим, что сумма расстояний не зависит от расположения точки внутри данной пирамиды.

Оценивание. Если правильно найдена высота пирамиды, то 2 балла. Найдены правильно отдельно расстояния до граней – по 2 балла за каждое. За верное решение – 12 баллов.

3. (*12 баллов*) В зависимости от параметра $a > 2$ найдите решение системы

$$\begin{cases}\sqrt{x^2-4}\sqrt{y^2-4} = a^2 - 4, \\ y^{(x-a)^2} = \left(\dfrac{x}{y}\right)^{\log_x y - 1}.\end{cases}$$

Ответ: *x*=*y*=*a*.

Решение. Из первого уравнения получим, что переменные больше 2 (отрицательные отпадают сразу). Логарифмируем второе уравнение по основанию *y*:

$$\log_y y^{(x-a)^2} = \log_y \left(\frac{x}{y}\right)^{\log_x y - 1}.$$

Получаем: $(x-a)^2 = (\log_x y - 1)\log_y\left(\frac{x}{y}\right) = (\log_x y - 1)(\log_y x - 1)$. В правой части – неположительное число, значит $x=y$ и $x=a$.

Оценивание. За верное решение 12 баллов. Если ответ угадан, то 2 балла.

4. (*14 баллов*) В бесконечной последовательности цифр 2, 0, 2, 1, … каждая цифра, начиная с пятой, равна последней цифре суммы предшествующих четырёх цифр этой последовательности. Встретятся ли в этой последовательности:

а) подряд числа 9, 8, 7, 6; *б*) вторично четвёрка 2, 0, 2, 1 (в этом же порядке)?

Ответ: *а*) нет; *б*) да.

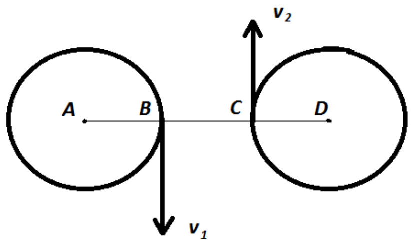
Решение. *а*) Будем записывать только чётности (чётная – пишем Ч, нечётная – Н) цифр этой последовательности, начиная с пятой. Получим:

Н, Ч, Ч, Ч, Н, Н, Ч, Ч, Ч, Н, Н, Ч, Ч, Ч, Н,… и т.д. Последовательность чётностей данной последовательности 9, 8, 7, 6 имеет вид Н, Ч, Н, Ч, и её нет в этом ряде.

б) Рассмотрим упорядоченные четвёрки из всевозможных цифр. На каждое место в такой четвёрке можно поставить любую из 10 цифр. Значит, всего разных четвёрок существует 10^4. Возьмём начало данной нам последовательности, содержащее 10^4+4 цифры. Из неё можно выбрать 10^4+1 четвёрку цифр, идущих в ней подряд. Так как всего таких **разных** четвёрок 10^4, то (по принципу Дирихле) из этих 10^4+1 четверок есть хотя бы две одинаковые. Пусть это $a_k, a_{k+1}, a_{k+2}, a_{k+3}$ и $a_m, a_{m+1}, a_{m+2}, a_{m+3}$ ($k<m$). В них, как мы заметили, $a_k = a_m$, $a_{k+1} = a_{m+1}$, $a_{k+2} = a_{m+2}$, $a_{k+3} = a_{m+3}$. Данная последовательность построена так, что по четырём её идущим подряд элементам $a_k, a_{k+1}, a_{k+2}, a_{k+3}$ предыдущий элемент a_{k-1} ими однозначно определяется по формуле: $a_{k-1} = a_{k+3} - a_k - a_{k+1} - a_{k+2}$ (равенство по модулю 10). Тогда $a_{k-1} = a_{m-1}$. Это значит, что если равны 2 четвёрки $a_k, a_{k+1}, a_{k+2}, a_{k+3}$ и $a_m, a_{m+1}, a_{m+2}, a_{m+3}$, то равны 2 предыдущие четвёрки $a_{k-1}, a_k, a_{k+1}, a_{k+2}$ $a_{m-1}, a_m, a_{m+1}, a_{m+2}$. Тогда, двигаясь по данной последовательности влево, к её началу, получим, что a_1, a_2, a_3, a_4 совпадает с $a_{m-k+1}, a_{m-k+2}, a_{m-k+3}, a_{m-k+4}$. Это требовалось доказать, так как эти последовательности разные ($k<m$).

Оценивание. За верное доказательство пункта *а*) – 6 баллов, за верное решение пункта *б*) – 8 баллов.

5. (*10 баллов*) Два автомобиля двигаются по окружностям одинакового радиуса со скоростями $v_1 = v$ и $v_2 = 2v$. Известно, что *AB*=*BC*=*CD*=*R*. Определите скорость v_{21} второго автомобиля в системе отсчёта, связанной с первым автомобилем в момент времени, указанный на рисунке.



Ответ: 4*v*.

Решение. Переносная скорость точки *C* в системе отсчёта, связанной с первым автомобилем: $v_C = \frac{AC}{AB} v_1 = 2v.$ **(5 баллов)**

При этом она направлена вертикально вниз. Следовательно, скорость второго автомобиля в системе отсчёта, связанной с первым:

$$v_{21} = v_2 + v_C = 2v + 2v = 4v.$$ **(5 баллов)**

6. (*15 баллов*) К колесу радиусом *R*=0,2 м с горизонтально расположенной осью прикрепили на ободе маленький грузик массой *m*=0,5 кг. Найдите массу колеса *M*, предполагая её однородно распределённой по ободу, если частота малых колебаний колеса вокруг оси равна ω=5 рад/с. Ускорение свободного падения *g*=10 м/с^2.

Ответ: 0,5 кг.

Решение. Выведем колёса из положения равновесия на угол α. Закон сохранения полной механической энергии:

$$mgR(1 - \cos\alpha) + \frac{mv^2}{2} + \frac{MR^2\omega^2}{2} = const.$$ **(5 баллов)**

С учётом того, что *v*=*ωR*, продифференцируем это выражение по времени:

$$mgR\sin\alpha \cdot \omega + \frac{mR^2}{2} 2\omega \cdot \varepsilon + \frac{MR^2}{2} 2\omega \cdot \varepsilon = 0.$$ **(5 баллов)**

Так как для малых углов $\sin\alpha \approx \alpha$, то получаем, что частота малых колебаний:

$$\omega = \sqrt{\frac{mg}{R(m+M)}}.$$ **(3 балла)**

В результате масса колеса: $M = \frac{mg}{\omega^2 R} - m = \frac{0{,}5\cdot 10}{5^2 \cdot 0{,}2} - 0{,}5 = 0{,}5$ кг. **(2 балла)**

7. (*15 баллов*) Три моля идеального газа находятся в цилиндрическом вертикальном сосуде под лёгким поршнем. Известно, что при изменении температуры газа от 27°С до 177 °С местоположение поршня не меняется. Определите объём занимаемый газом в этом температурном интервале. Атмосферное давление 10^5 Па.

Ответ: 0,093 м^3.

Решение. Условия равновесия для начального и конечного состояний газа:

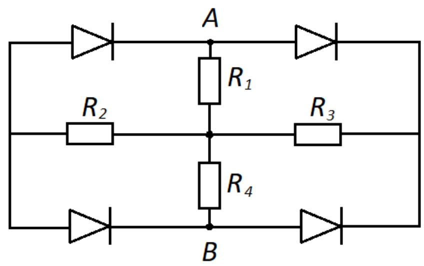
$p_a S + F_{\text{тр}} = p_1 S,$ **(4 балла)**

$p_a S - F_{\text{тр}} = p_2 S.$ **(4 балла)**

В результате получаем: $2p_a = p_1 + p_2 = \frac{\vartheta R}{V}(T_1 + T_2).$ **(3 балла)**

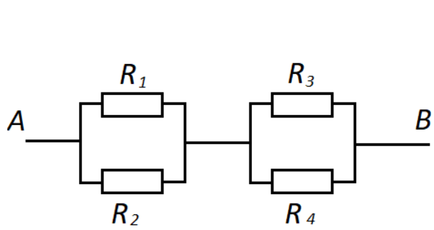
$V = \frac{\vartheta R}{2p_a}(T_1 + T_2) = \frac{3 \cdot 8{,}31 \cdot (300+450)}{2 \cdot 10^5} \approx 0{,}093 \text{ м}^3.$ **(4 балла)**

8. (*10 баллов*) В изображённой на рисунке электрической схеме сопротивления резисторов R_1=1 Ом, R_2=2 Ом, R_3=3 Ом, и R_4=4 Ом. Считайте, что сопротивления всех диодов в прямом направлении пренебрежимо малы, а в обратном направлении равны бесконечности. Определите сопротивление всей схемы между точками A и B в ситуации, когда к точке A подключают отрицательный полюс источника тока, а к точке B – положительный. Сопротивление соединительных проводов пренебрежимо мало.



Ответ: ≈2,38 Ом.

Решение. В предложенной ситуации получается следующая эквивалентная схема: **(5 баллов)**



Её общее сопротивление: $R = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} + \frac{R_3 R_4}{R_3 + R_4} = \frac{1 \cdot 2}{1+2} + \frac{3 \cdot 4}{3+4} = \frac{50}{21} \approx 2{,}38$ Ом. **(5 баллов)**