Вариант 1

1. (*11 баллов*) Известно, что $\cos\alpha+\cos\beta=\mathrm{c}\neq 0$, $\sin\alpha+\sin\beta=s\neq 0$. Выразите $\cos(\alpha+\beta)$ через c и s.

Ответ: $\frac{c^2-s^2}{c^2+s^2}$.

Решение. Имеем $\cos\alpha+\cos\beta=2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}=c$,

$$\sin\alpha+\sin\beta=2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}=s.$$

Поделив второе равенство на первое, получим $\mathrm{tg}\frac{\alpha+\beta}{2}=\frac{s}{c}$. Осталось применить формулу универсальной подстановки

$$\cos x=\frac{1-\mathrm{tg}^2\left(\frac{x}{2}\right)}{1+\mathrm{tg}^2\left(\frac{x}{2}\right)}.$$

Оценивание. За верное решение 11 баллов.

2. (*12 баллов*) Пусть *ABCD* – трёхзвенная ломаная в пространстве, все звенья которой равны и $\angle BCD=90^o$. Найдите расстояние от точки *A* до середины *BD*, если *AD*=2.

Ответ: $\sqrt{2}$.

Решение. Пусть *M* – середина *BD*. Треугольники *ABM* и *BDA* подобны. Действительно, угол при вершине *B* у них общий, и $\frac{AB}{BM}=\frac{BC}{BM}=\sqrt{2}=\frac{BD}{BC}=\frac{BD}{AB}$. Коэффициент подобия этих треугольников равен $\sqrt{2}$, следовательно, $AM=AD/\sqrt{2}=2/\sqrt{2}=\sqrt{2}$.

Оценивание. За верное решение 12 баллов.

3. (*13 баллов*) Дан набор действительных чисел $x_1, x_2, \ldots x_{2k+1}$. Для произвольной нечётной степени m большей 2021 известно, что $x_1^m+x_2^m+\cdots+x_{2k+1}^m=0$. Докажите, что произведение этих чисел равно 0.

Решение. Докажем, что среди данных чисел имеются пары *a* и *–a*. Возьмём максимальное по модулю слагаемое (если не одно – любое из них) и разделим на этот модуль. Тогда получаем несколько 1 и –1, а остальные числа будут меньше 1 по модулю. Начнём увеличивать степень. Числа меньшие 1 в сумме дадут число меньшее 1, начиная с некоторой степени. Так как сумма 1 и –1 равна 0, то найдётся по крайней мере одно число равное максимальному по модулю, но с обратным знаком и ещё, возможно, несколько таких пар. Рассмотрим оставшиеся числа (их нечётное число) и повторим для них рассуждение. После конечного числа таких операций получим, что все ненулевые числа исчерпаны, а числа остались. Следовательно, среди чисел есть нуль.

Оценивание. За верное доказательство 13 баллов. Если без обоснования считается, что в наборе есть равное нулю число, то 2 балла.

4. (*14 баллов*) При каких значениях параметра a каждое из уравнений $x^2 + ax + 2021 = 0$ и $x^2 + 2021x + a = 0$ имеет два целых корня?

Ответ: – 2022.

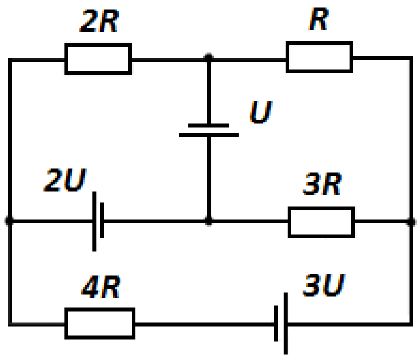
Решение. Предположим, что ни одно из уравнений не имеет корня, равного 1 по абсолютной величине. Пусть x_1 и x_2 – корни первого уравнения. Используя формулы Виета, имеем $|a| = |x_1 + x_2| \leq |x_1| + |x_2|$. (Здесь использовали неравенство треугольника.) Так как $|x_1|, |x_2|$ отличны от 1 и целые, а $|x_1| \cdot |x_2| = 2021$, то наибольшее значение суммы будет, когда одно из них равно 2. Следовательно, $|a| \leq 2 + \frac{2021}{2} = 1012{,}5$.

Пусть t_1 и t_2 – корни второго уравнения. Тогда $|a| = |t_1 \cdot t_2|$. Так как $2021 = |t_1 + t_2| \leq |t_1| + |t_2|$, то при $|t_1| = 2$ получаем, что $|t_2| \geq 2019$. Значит, $|a| \geq 2 \cdot 2019$=4038. Получено противоречие, то есть хотя бы одно из уравнений имеет корень равный 1 по модулю.

Теперь, перебирая все варианты, находим, что a=– 2022.

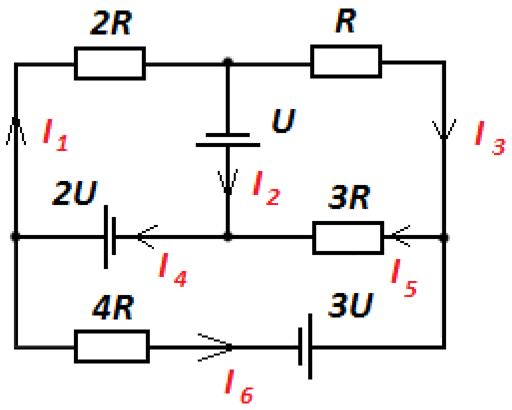
Оценивание. За верное решение 14 баллов. Если получен правильный ответ, но учащийся без обоснования считает, что корни равны ± 1, то ставим 5 баллов.

5. (*15 баллов*) Найдите ток, протекающий через резистор с сопротивлением 3*R* в цепи, схема которой изображена на рисунке. Все батарейки идеальные, напряжение *U*=5 В, сопротивление *R*=100 Ом.



Ответ: ≈2,6 мА.

Решение. Расставим токи, текущие по цепи.



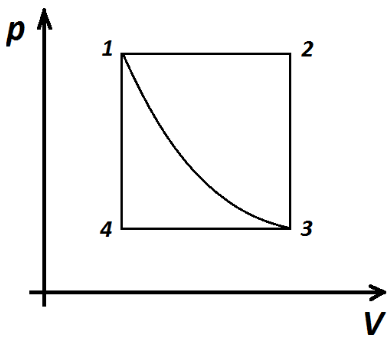
Запишем правила Кирхгофа: $-U=RI_3+3R\cdot I_5$, **(4 балла)**

$$3U+2U=4R\cdot I_6+3R\cdot I_5,$$ **(4 балла)**

$$I_3+I_6=I_5.$$ **(4 балла)**

Решая данную систему, получаем: $I_5=\frac{1}{380}$ А $\approx 2{,}6$ мА. **(3 балла)**

6. (*15 баллов*) С одноатомным идеальным газом провели два цикла: 1-2-3-1, коэффициент полезного действия которого η_1, и 1-3-4-1, коэффициент полезного действия которого η_2. Известно, что изменение температуры ΔT в процессах 4-1 и 1-2 одинаковое. Определите кпд цикла 1-2-3-4-1. Процесс 3-1 – адиабатный.



Ответ: $\frac{1}{8}(5\eta_1+3\eta_2)$.

Решение. КПД цикла 1-2-3-1: $\eta_1=\frac{A_1}{Q_{12}}$. **(2 балла)**

КПД цикла 1-3-4-1: $\eta_2=\frac{A_2}{Q_{41}}$. **(2 балла)**

Искомый КПД: $\eta=\frac{A_1+A_2}{Q_{12}+Q_{41}}=\frac{\eta_1 Q_{12}+\eta_2 Q_{41}}{Q_{12}+Q_{41}}$. **(4 балла)**

С учётом того, что: $Q_{12}=\frac{5}{2}\nu R\Delta T_{12}$ **(2 балла)**

и $Q_{41}=\frac{3}{2}\nu R\Delta T_{41}$, получаем: **(2 балла)**

$\eta=\frac{1}{8}(5\eta_1+3\eta_2)$. **(3 балла)**

7. (*10 баллов*) Жёсткий стержень *AB* длиной 100 см скользит по горизонтальной поверхности. Известно, что в данный момент времени скорость точки *A* равная 5 м/с направлена точно в сторону точки *B*. Найдите значение скорости точки *B*, если известно, что она направлена под углом 60° к стержню.

Ответ: 10 м/с.

Решение. Проекция скорости точки *B* вдоль стержня: $v_{\text{вдоль}} = v_{\text{A}} = 5\ \text{м/с}$.

(5 баллов)

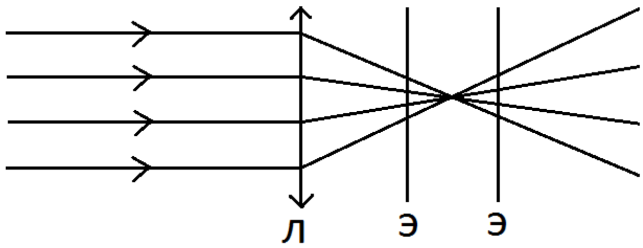
Следовательно, её скорость: $v_{\text{B}} = \frac{v_{\text{вдоль}}}{\cos 60^{\circ}} = 10\ \text{м/с}$. **(5 баллов)**

8. (*10 баллов*) На тонкую линзу падает нормально параллельный пучок света. За линзой на расстоянии 80 см от неё располагается экран, на котором видно круглое пятно определенного диаметра. Если экран передвинуть на 40 см, то на экране вновь будет видно пятно такого же диаметра. Определите фокусное расстояние линзы.

Ответ: 100 см или 60 см.

Решение. Рисунок, объясняющий ситуацию, которая описывается в условии:

(4 балла)



Отсюда видно, что возможны два варианта: экран могут отодвигать от линзы или подвигать к ней. В результате фокусное расстояние линзы:

F_1=80+20=100 см или **(3 балла)**

F_2=80–20=60 см. **(3 балла)**

Вариант 2

1. (*11 баллов*) Известно, что $\cos\alpha + \cos\beta = c \neq 0$, $\sin\alpha + \sin\beta = s \neq 0$. Выразите $\sin(\alpha + \beta)$ через c и s.

Ответ: $\frac{2sc}{c^2+s^2}$.

Решение. Имеем $\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2} = c$,

$$\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2} = s.$$

Поделив второе равенство на первое, получим $\operatorname{tg}\frac{\alpha+\beta}{2} = \frac{s}{c}$. Осталось применить формулу универсальной подстановки

$$\sin x = \frac{2\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}\right)}{1+\operatorname{tg}^2\left(\frac{x}{2}\right)}.$$

Оценивание. За верное решение 11 баллов.

2. (*12 баллов*) Пусть *ABCD* – трёхзвенная ломаная в пространстве, все звенья которой равны и $\angle BCD = 90^o$. Найдите расстояние от точки *A* до середины *BD*, если *AD*=1.

Ответ: $\sqrt{2}/2$.

Решение. Пусть *M* – середина *BD*. Треугольники *ABM* и *BDA* подобны. Действительно, угол при вершине *B* у них общий, и $\frac{AB}{BM} = \frac{BC}{BM} = \sqrt{2} = \frac{BD}{BC} = \frac{BD}{AB}$. Коэффициент подобия этих треугольников равен $\sqrt{2}$, следовательно, $AM=AD/\sqrt{2}=1/\sqrt{2} = \sqrt{2}/2$.

Оценивание. За верное решение 12 баллов.

3. (*13 баллов*) Дан набор действительных чисел $x_1, x_2, \ldots x_{2k+1}$. Для произвольной нечётной степени m большей 2020 известно, что $x_1^m + x_2^m + \cdots + x_{2k+1}^m = 0$. Докажите, что произведение этих чисел равно 0.

Решение. Докажем, что среди данных чисел имеются пары *a* и –*a*. Возьмём максимальное по модулю слагаемое (если не одно – любое из них) и разделим на этот модуль. Тогда получаем несколько 1 и –1, а остальные числа будут меньше 1 по модулю. Начнём увеличивать степень. Числа меньшие 1 в сумме дадут число меньшее 1, начиная с некоторой степени. Так как сумма 1 и –1 равна 0, то найдётся по крайней мере одно число равное максимальному по модулю, но с обратным знаком и ещё, возможно, несколько таких пар. Рассмотрим оставшиеся числа (их нечётное число) и повторим для них рассуждение. После конечного числа таких операций получим, что все ненулевые числа исчерпаны, а числа остались. Следовательно, среди чисел есть нуль.

Оценивание. За верное доказательство 13 баллов. Если без обоснования считается, что в наборе есть равное нулю число, то 2 балла.

4. (*14 баллов*) При каких значениях параметра a каждое из уравнений $x^2 + ax + 2020 = 0$ и $x^2 + 2020x + a = 0$ имеет два целых корня?

Ответ: – 2021.

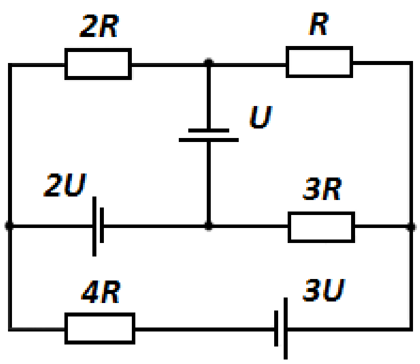
Решение. Предположим, что ни одно из уравнений не имеет корня, равного 1 по абсолютной величине. Пусть x_1 и x_2 – корни первого уравнения. Используя формулы Виета, имеем $|a| = |x_1 + x_2| \le |x_1| + |x_2|$. (Здесь использовали неравенство треугольника.) Так как $|x_1|, |x_2|$ отличны от 1 и целые, а $|x_1| \cdot |x_2| = 2020$, то наибольшее значение суммы будет, когда одно из них равно 2. Следовательно, $|a| \le 2 + \frac{2020}{2} = 1012$.

Пусть t_1 и t_2 – корни второго уравнения. Тогда $|a| = |t_1 \cdot t_2|$. Так как $2020 = |t_1 + t_2| \le |t_1| + |t_2|$, то при $|t_1| = 2$ получаем, что $|t_2| \ge 2018$. Значит, $|a| \ge 2 \cdot 2018$=4036. Получено противоречие, то есть хотя бы одно из уравнений имеет корень равный 1 по модулю.

Теперь, перебирая все варианты, находим, что a=– 2021.

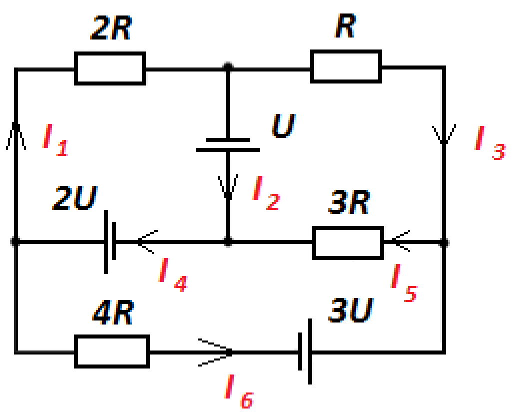
Оценивание. За верное решение 14 баллов. Если получен правильный ответ, но учащийся без обоснования считает, что корни равны ± 1, то ставим 5 балла.

5. (*15 баллов*) Найдите ток, протекающий через резистор с сопротивлением 4*R*, в цепи, схема которой изображена на рисунке. Все батарейки идеальные, напряжение *U*=10 В, сопротивление *R*=10 Ом.



Ответ: ≈1,21 А.

Решение. Расставим токи, текущие по цепи.



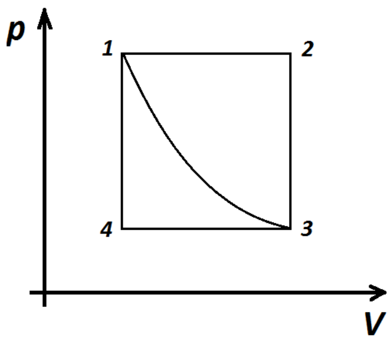
Запишем правила Кирхгофа: $-U=RI_3+3R\cdot I_5$, **(4 балла)**

$$3U+2U=4R\cdot I_6+3R\cdot I_5,$$ **(4 балла)**

$$I_3+I_6=I_5.$$ **(4 балла)**

Решая данную систему, получаем: $I_6=\frac{23}{19}$ A $\approx 1{,}21$ A. **(3 балла)**

6. (*15 баллов*) С двухатомным идеальным газом провели два цикла: 1-2-3-1, коэффициент полезного действия которого η_1, и 1-3-4-1, коэффициент полезного действия которого η_2. Известно, что изменение температуры ΔT в процессах 4-1 и 1-2 одинаковое. Определите кпд цикла 1-2-3-4-1. Процесс 3-1 – адиабатный.



Ответ: $\frac{1}{12}(7\eta_1+5\eta_2)$.

Решение. КПД цикла 1-2-3-1: $\eta_1=\frac{A_1}{Q_{12}}$. **(2 балла)**

КПД цикла 1-3-4-1: $\eta_2=\frac{A_2}{Q_{41}}$. **(2 балла)**

Искомый КПД: $\eta=\frac{A_1+A_2}{Q_{12}+Q_{41}}=\frac{\eta_1 Q_{12}+\eta_2 Q_{41}}{Q_{12}+Q_{41}}$. **(4 балла)**

С учётом того, что: $Q_{12}=\frac{7}{2}\nu R\Delta T_{12}$ **(2 балла)**

и $Q_{41}=\frac{5}{2}\nu R\Delta T_{41}$. **(2 балла)**

Получаем $\eta=\frac{1}{12}(7\eta_1+5\eta_2)$. **(3 балла)**

7. (*10 баллов*) Жёсткий стержень *AB* длиной 50 см скользит по горизонтальной поверхности. Известно, что в данный момент времени скорость точки *A* равная 4 м/с направлена точно в сторону точки *B*. Найдите значение скорости точки *B*, если известно, что она направлена под углом 30° к стержню.

Ответ: ≈4,6 м/с.

Решение. Проекция скорости точки *B* вдоль стержня:

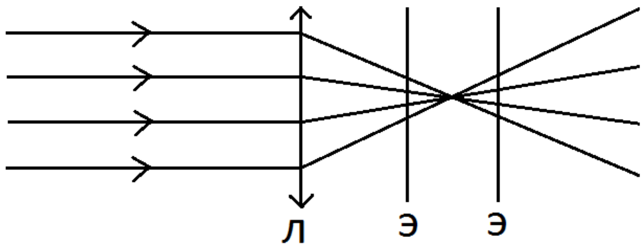
$v_{\text{вдоль}} = v_{\text{А}} = 4\ \text{м/с}.$ **(5 баллов)**

Следовательно, её скорость: $v_{\text{В}} = \frac{v_{\text{вдоль}}}{\cos 30^{\circ}} \approx 4{,}6\ \text{м/с}.$ **(5 баллов)**

8. (*10 баллов*) На тонкую линзу падает нормально параллельный пучок света. За линзой на расстоянии 120 см от неё располагается экран, на котором видно круглое пятно определённого диаметра. Если экран передвинуть на 60 см, то на экране вновь будет видно пятно такого же диаметра. Определите фокусное расстояние линзы.

Ответ: 150 см или 90 см.

Решение. Рисунок, объясняющий ситуацию, которая описывается в условии:
(4 балла)



Отсюда видно, что возможны два варианта: экран могут отодвигать от линзы или подвигать к ней. В результате фокусное расстояние линзы:

F_1=120+30=150 см **(3 балла)**

или F_2=120–30=90 см. **(3 балла)**