Многопрофильная инженерная олимпиада «Звезда»
по естественным наукам

6 класс **Заключительный этап** **2018–2019**

Вариант 1

Задания, ответы и критерии оценивания

1. Петя и Вася соревновались в беге на 100 м. Когда Петя финишировал, Вася отставал от него на 10 м. Во время второго забега Петя встал ровно в 10 м позади Васи. Кто финишировал первым во втором забеге и на сколько метров он опередил соперника? (Считаем, что каждый из мальчиков оба раза бежал с одной и той же своей постоянной скоростью).

Ответ: Петя опередил Васю на 1 м.

Решение. Во втором забеге Петя ликвидирует отставание от Васи, пробежав 100 м (Вася за это время пробежит 90 м). До финиша остаётся 10 м — в 10 раз меньше, чем на старте 1-го забега. Значит, и опережение составит в 10 раз меньше, т. е. 1 м.

Оценивание. За полное решение 11 баллов.

2. Диван стоил 62 500 руб. Раз в месяц его цена изменялась на 20% в сторону увеличения или уменьшения. Известно, что за полгода трижды цена повышалась и трижды понижалась (в каком порядке это происходило, неизвестно). Можно ли однозначно определить, сколько стоил диван через полгода? Если да, то сколько он стал стоить?

Ответ: да; диван будет стоить 55 296 руб.

Решение. Удорожание на 20% означает, что текущая цена умножается на 6/5, а удешевление на 20% означает, что текущая цена умножается на 4/5. Поэтому независимо от того, в каком порядке цена повышалась или понижалась, цена дивана через полгода составит $62\,500 \cdot (6/5)^3 \cdot (4/5)^3 = 55\,296$ руб.

Оценивание. Если рассмотрены только некоторые частные случаи и получен правильный числовой ответ, 4 балла. За полное решение 12 баллов.

3. Сколько существует пятизначных чисел, у которых сумма первых двух цифр вдвое меньше суммы двух последних цифр?

Ответ: 2250.

Решение. Пусть первые две цифры числа a и b, а две последние c и d. Найдём, сколько есть комбинаций этих цифр, для которых $2(a+b) = c+d$. Поскольку $c + d \leqslant 18$, то $a + b \leqslant 9$.

Обозначим через x_i $(i = 1, 2, \ldots, 9)$ количество пар первых двух цифр, сумма которых равна i. Первая цифра принимает значения от 1 до i, после чего вторая цифра определяется однозначно. Значит, $x_i = i$.

Обозначим через y_i ($i = 1, 2, \ldots, 9$) количество пар последних двух цифр, сумма которых равна $2i$. Всякий раз по цифре c цифра d определяется однозначно: $d = 2i - c$. Поэтому нужно подсчитать количество возможных значений цифры c. Если $i \leqslant 4$, т. е. $2i \leqslant 8$, то цифра c принимает значения от 0 до $2i$ — всего $2i + 1$ значений. Другими словами, в этом случае $y_i = 2i + 1$. Если же $5 \leqslant i \leqslant 9$, т. е. $10 \leqslant 2i \leqslant 18$, то цифра c принимает значения от $2i - 9$ до 9 — всего $19 - 2i$ значений и $y_i = 19 - 2i$.

Соберём найденные значения x_i и y_i в одну таблицу.

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9
x_i	1	2	3	4	5	6	7	8	9
y_i	3	5	7	9	9	7	5	3	1

Количество пятизначных чисел, в которых $a + b = i$, а $c + d = 2i$, равно $10x_iy_i$ (средняя цифра выбирается 10 способами). Поэтому общее количество искомых чисел равно $10(x_1y_1 + x_2y_2 + \ldots + x_9y_9)$. Подстановка найденных значений даёт ответ 2250.

Оценивание. За полное решение 13 баллов. Если верно найдены все x_i и y_i, но арифметическая ошибка в окончательном подсчёте, 11 баллов. Если ход решения верный, но неверно определены некоторые x_i или y_i, 4-5 баллов.

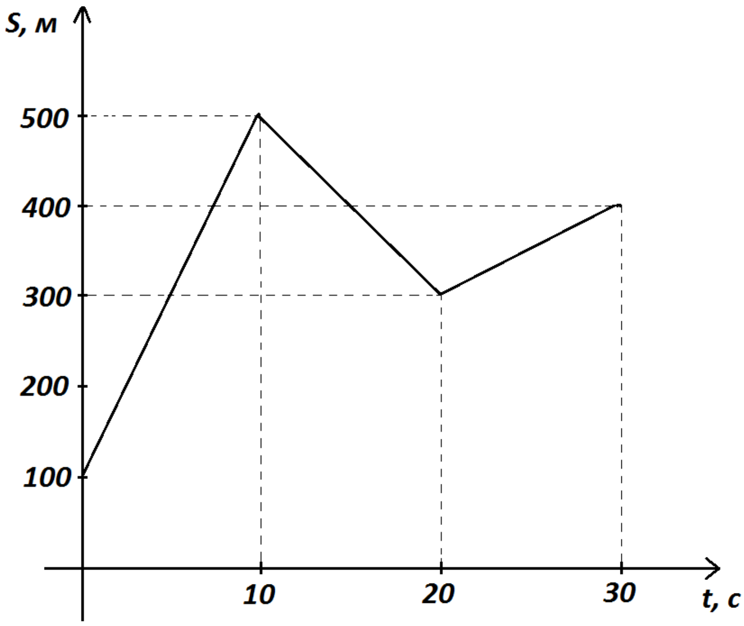
4. Вдоль окружности на равных расстояниях друг от друга стоят 123 точки. Аня и Боря по очереди красят по одной точке в синий или красный цвет (красить можно любую из ранее не покрашенных точек). Проигрывает тот, после хода которого появятся две соседние точки одного цвета. Кто выиграет при правильной игре, если Аня ходит первой?

Ответ: Боря.

Решение. Посмотрим, как располагаются закрашенные точки в тот момент, когда новые ходы невозможны. Если имеются две рядом стоящие незакрашенные точки, одну из них можно закрасить. Значит, в заключительной позиции все точки делятся на группы последовательных закрашенных точек, разделённых одинокими незакрашенными точками. Внутри каждой группы цвета точек чередуются. Если одна группа заканчивается синей (красной) точкой, то следующая за ней начинается с красной (соответственно синей) точки, иначе точку между указанными группами можно покрасить. Поэтому если мы удалим незакрашенные точки, то получим чередование красных и синих точек — значит, красных и синих точек поровну, а общее количество закрашенных точек чётное. Осталось заметить, что после любого хода первого игрока имеем нечётное количество закрашенных точек, а после любого хода второго игрока их количество становится чётным. Значит, заключительная позиция возникает после хода второго игрока. Он и выигрывает. При этом его стратегия очень простая: не делать заведомо проигрышных ходов.

Оценивание. За верное решение 14 баллов.

5. (*15 баллов*) Два автомобиля едут по дороге в одном направлении. Средняя скорость одного из них за время $t = 30\, c$ равна $v_1 = 25\, м/с$. На графике представлена зависимость расстояния S между автомобилями от времени t. Определите среднюю скорость v_2 другого автомобиля за $t = 30\, c$ движения.



Ответ: $15\,\frac{м}{с}$ или $35\,\frac{м}{с}$

Решение. Из графика видно, что скорость одного автомобиля относительно другого $v_{отн} = \frac{400-100}{30} = 10\,\frac{м}{с}$. **(5 баллов)**

Возможны два варианта, в зависимости от того, какой автомобиль едет первым: $v_2 = v_1 + v_{отн} = 25 + 10 = 35\,\frac{м}{с}$ **(5 баллов)**

или $v_2 = v_1 - v_{отн} = 25 - 10 = 15\,\frac{м}{с}$. **(5 баллов)**

6. (*10 баллов*) Англичанин являлся владельцем участка земли в России. Он знает, что, в привычных ему единицах, размер его участка составляет два акра. Стоимость земли $500000\, руб$ за один гектар. Известно, что $1\, акр = 4840\, квадратных\, ярдов$, $1\, ярд = 0{,}9144\, метра$, $1\, гектар = 10000\, м^2$. Посчитайте, сколько выручит англичанин в результате продажи.

Ответ: *примерно* $405000\, руб$

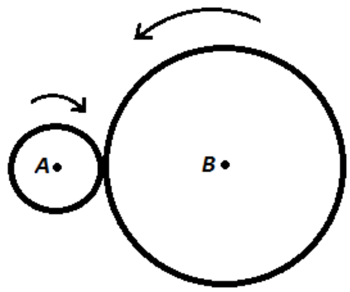
Решение. $1\,\text{квадратный ярд} = 0{,}9144 \cdot 0{,}9144 = 0{,}83612736\ м^2$, **(2 балла)**

$2\,акра = 2 \cdot 4840 = 9680\ квадратных\ ярда = 9680 \cdot 0{,}83612739 = 8093{,}7128448\ м^2$

(2 балла), $8093{,}7128448\ м^2 = \dfrac{8093{,}7128448\ м^2}{10000} \approx 0{,}8094\ га$, **(3 балла)**

$0{,}8094 \cdot 500000 = 404685{,}6\ руб.$ **(3 балла)**

7. (*10 баллов*) Два колеса вращаются зацепившись друг за друга вокруг неподвижных осей, проходящих через центры колес A и B. Радиусы колес отличаются в три раза. Малое колесо делает 30 оборотов в минуту. Определите, сколько секунд тратит на один оборот большое колесо?



Ответ: $6\ с$

Решение. Скорости точек, лежащих на краю колес одинаковы. **(2 балла)**

Расстояния, проходимые этими точками отличаются в три раза. **(2 балла)**

Малое колесо тратит на один оборот: $t_{мал} = \dfrac{1\ мин}{30\ оборотов} = \dfrac{60\ с}{30\ оборотов} = 2\ с.$

(3 балла)

Следовательно, большое колесо тратит на один оборот:

$t_{бол} = 3t_{мал} = 3 \cdot 2 = 6\ с.$ **(3 балла)**

8. (*15 баллов*) Плотностью называют отношение массы тела к его объёму. Имеется два кубика. Второй кубик сделан из материала с вдвое большей плотностью по сравнению с первым, а длина стороны второго кубика на 100% больше длины стороны первого. На сколько процентов масса второго кубика больше массы первого?

Ответ: на $1500\ \%$

Решение. Из условия получаем $\rho_2 = 2\rho_1$, т.е: $\frac{m_2}{V_2} = 2 \cdot \frac{m_1}{V_1}$. **(3 балла)**

Также из условия следует, что длина стороны второго кубика $a_2 = 2a_1$.
(2 балла)

Следовательно, их объёмы связаны соотношением $V_2 = a_2^3 = (2a_1)^3 = 8V_1$.
(3 балла)

Получаем $\frac{m_2}{8V_1} = 2 \cdot \frac{m_1}{V_1}$. **(2 балла)** Откуда следует, что $m_2 = 16m_1$. **(2 балла)**

То есть масса второго кубика больше на $1500\,\%$. **(3 балла)**

Многопрофильная инженерная олимпиада «Звезда» по естественным наукам

6 класс **Заключительный этап** **2018–2019**

Вариант 2

Задания, ответы и критерии оценивания

1. Петя и Вася соревновались в беге на 60 м. Когда Петя финишировал, Вася отставал от него на 9 м. Во время второго забега Петя встал ровно в 9 м позади Васи. Кто финишировал первым во втором забеге и на сколько метров он опередил соперника? (Считаем, что каждый из мальчиков оба раза бежал с одной и той же своей постоянной скоростью).

Ответ: Петя опередил Васю на 1,35 м.

Решение. Во втором забеге Петя ликвидирует отставание от Васи, пробежав 60 м (Вася за это время пробежит 51 м). До финиша остаётся 9 м — в 20/3 раз меньше, чем на старте 1-го забега. Значит, и опережение составит в 20/3 раз меньше, т. е. $9 \cdot \frac{3}{20} = 1{,}35$ м.

Оценивание. За полное решение 11 баллов.

2. Товар стоил 64 руб. Раз в месяц его цена изменялась на 50% в сторону увеличения или уменьшения. Известно, что за полгода трижды цена повышалась и трижды понижалась (в каком порядке это происходило, неизвестно). Можно ли однозначно определить, сколько стоил товар через полгода? Если да, то сколько он стал стоить?

Ответ: да; товар будет стоить 27 руб.

Решение. Удорожание на 50% означает, что текущая цена умножается на 3/2, а удешевление на 50% означает, что текущая цена умножается на 1/2. Поэтому независимо от того, в каком порядке цена повышалась или понижалась, цена дивана через полгода составит $64 \cdot (3/2)^3 \cdot (1/2)^3 = 27$ руб.

Оценивание. Если рассмотрены только некоторые частные случаи и получен правильный числовой ответ, 4 балла. За полное решение 12 баллов.

3. Сколько существует пятизначных чисел, у которых сумма первых двух цифр вдвое больше суммы двух последних цифр?

Ответ: 2600.

Решение. Пусть первые две цифры числа a и b, а две последние c и d. Найдём, сколько есть комбинаций этих цифр, для которых $a+b = 2(c+d)$. Поскольку $a + b \leqslant 18$, то $c + d \leqslant 9$.

Обозначим через x_i $(i = 1, 2, \ldots, 9)$ количество пар последних двух цифр, сумма которых равна i. Первая цифра принимает значения от 0 до i, после чего вторая цифра определяется однозначно. Значит, $x_i = i + 1$.

Обозначим через y_i $(i = 1, 2, \ldots, 9)$ количество пар первых двух цифр, сумма которых равна $2i$. Всякий раз по цифре a цифра b определяется однозначно: $b = 2i - a$. Поэтому нужно подсчитать количество возможных значений цифры a. Если $i \leqslant 4$, т. е. $2i \leqslant 8$, то цифра a принимает значения от 1 до $2i$ — всего $2i$ значений. Другими словами, в этом случае $y_i = 2i$. Если же $5 \leqslant i \leqslant 9$, т. е. $10 \leqslant 2i \leqslant 18$, то цифра a принимает значения от $2i - 9$ до 9 — всего $19 - 2i$ значений и $y_i = 19 - 2i$.

Соберём найденные значения x_i и y_i в одну таблицу.

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9
x_i	2	3	4	5	6	7	8	9	10
y_i	2	4	6	8	9	7	5	3	1

Количество пятизначных чисел, в которых $c + d = i$, а $a + b = 2i$, равно $10x_iy_i$ (средняя цифра выбирается 10 способами). Поэтому общее количество искомых чисел равно $10(x_1y_1 + x_2y_2 + \ldots + x_9y_9)$. Подстановка найденных значений даёт ответ 2600.

Оценивание. За полное решение 13 баллов. Если верно найдены все x_i и y_i, но арифметическая ошибка в окончательном подсчёте, 11 баллов. Если ход решения верный, но неверно определены некоторые x_i или y_i, 4-5 баллов.

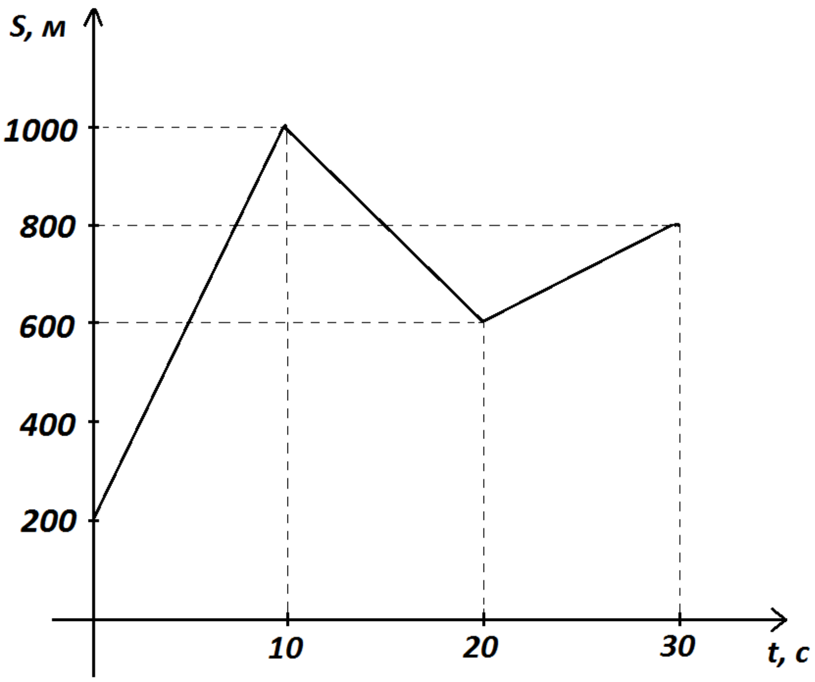
4. Вдоль окружности на равных расстояниях друг от друга стоят 33 точки. Аня и Боря по очереди красят по одной точке в синий или красный цвет (красить можно любую из ранее не покрашенных точек). Проигрывает тот, после хода которого появятся две соседние точки одного цвета. Кто выиграет при правильной игре, если Аня ходит первой?

Ответ: Боря.

Решение. Посмотрим, как располагаются закрашенные точки в тот момент, когда новые ходы невозможны. Если имеются две рядом стоящие незакрашенные точки, одну из них можно закрасить. Значит, в заключительной позиции все точки делятся на группы последовательных закрашенных точек, разделённых одинокими незакрашенными точками. Внутри каждой группы цвета точек чередуются. Если одна группа заканчивается синей (красной) точкой, то следующая за ней начинается с красной (соответственно синей) точки, иначе точку между указанными группами можно покрасить. Поэтому если мы удалим незакрашенные точки, то получим чередование красных и синих точек — значит, красных и синих точек поровну, а общее количество закрашенных точек чётное. Осталось заметить, что после любого хода первого игрока имеем нечётное количество закрашенных точек, а после любого хода второго игрока их количество становится чётным. Значит, заключительная позиция возникает после хода второго игрока. Он и выигрывает. При этом его стратегия очень простая: не делать заведомо проигрышных ходов.

Оценивание. За верное решение 14 баллов.

5. (*15 баллов*) Два автомобиля едут по дороге в одном направлении. Средняя скорость одного из них за время $t = 30\,с$ равна $v_1 = 30\,м/с$. На графике представлена зависимость расстояния S между автомобилями от времени t. Определите среднюю скорость v_2 другого автомобиля за $t = 30\,с$ движения.



Ответ: $10\,\frac{м}{с}$ или $50\,\frac{м}{с}$

Решение. Из графика видно, что скорость одного автомобиля относительно другого $v_{отн} = \frac{800-200}{30} = 20\,\frac{м}{с}$. **(5 баллов)**

Возможны два варианта, в зависимости от того, какой автомобиль едет первым. $v_2 = v_1 + v_{отн} = 30 + 20 = 50\,\frac{м}{с}$ **(5 баллов)**

Или $v_2 = v_1 - v_{отн} = 30 - 20 = 10\,\frac{м}{с}$. **(5 баллов)**

6. (*10 баллов*) Англичанин являлся владельцем участка земли в России. Он знает, что, в привычных ему единицах, размер его участка составляет три акра. Стоимость земли $250000\,руб$ за один гектар. Известно, что $1\,акр = 4840\,квадратных\,ярдов$, $1\,ярд = 0{,}9144\,метра$, $1\,гектар = 10000\,м^2$. Посчитайте, сколько выручит англичанин в результате продажи.

Ответ: *примерно* $303514\,руб$

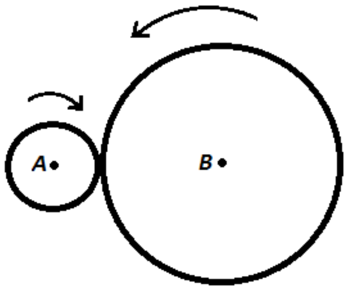
Решение. $1\,\textit{квадратный ярд} = 0{,}9144 \cdot 0{,}9144 = 0{,}83612736\ \textit{м}^2$, **(2 балла)**

$3\ \textit{акра} = 3 \cdot 4840 = 14520\ \textit{квадратных ярда} = 14520 \cdot 0{,}83612739 = 12140{,}57\ \textit{м}^2$

(2 балла), $12140{,}57\ \textit{м}^2 = \dfrac{12140{,}57\ \textit{м}^2}{10000} \approx 1{,}214057\ \textit{га}$, **(3 балла)**

$1{,}214057 \cdot 250000 = 303514{,}25\ \textit{руб}$. **(3 балла)**

7. (*10 баллов*) Два колеса вращаются зацепившись друг за друга вокруг неподвижных осей, проходящих через центры колес A и B. Радиусы колес отличаются в три раза. Большое колесо делает 10 оборотов в минуту. Определите, сколько секунд тратит на один оборот малое колесо?



Ответ: $2\ \textit{с}$

Решение. Скорости точек, лежащих на краю колес одинаковы. **(2 балла)**

Расстояния, проходимые этими точками отличаются в три раза. **(2 балла)**

Большое колесо тратит на один оборот

$t_{бол} = \dfrac{1\ \textit{мин}}{10\ \textit{оборотов}} = \dfrac{60\ \textit{с}}{10\ \textit{оборотов}} = 6\ \textit{с}$. **(3 балла)**

Следовательно, малое колесо тратит на один оборот $t_{мал} = \dfrac{1}{3} t_{бол} = \dfrac{6}{3} = 2\ \textit{с}$.

(3 балла)

8. (*15 баллов*) Плотностью называют отношение массы тела к его объёму. Имеется два кубика. Второй кубик сделан из материала с вдвое меньшей плотностью по сравнению с первым, а длина стороны второго кубика на 100% больше длины стороны первого. На сколько процентов масса второго кубика больше массы первого?

Ответ: на $300\,\%$

Решение. Из условия следует, что $\rho_2 = \frac{1}{2}\rho_1$, т.е: $\frac{m_2}{V_2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{m_1}{V_1}$. **(3 балла)**

Также из условия следует, что длина стороны второго кубика $a_2 = 2a_1$. **(2 балла)**

Следовательно, их объёмы связаны соотношением $V_2 = a_2^3 = \left(2a_1\right)^3 = 8V_1$. **(3 балла)**

Получаем $\frac{m_2}{8V_1} = \frac{1}{2} \cdot \frac{m_1}{V_1}$. **(2 балла)** Откуда следует, что $m_2 = 4m_1$. **(2 балла)**

То есть масса второго кубика больше на $300\,\%$. **(3 балла)**