

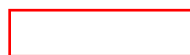


Многопрофильная инженерная олимпиада
«Звезда»
по естественным наукам
Заключительный этап
2016–2017 уч. год

Задания, ответы и критерии оценивания

8 класс

Вариант I



1. Имеются 3 кг сплава меди с оловом, в котором 40% меди и 7 кг другого сплава меди с оловом, в котором 30% меди. Какой массы нужно взять куски этих сплавов, чтобы после переплавки получить 8 кг сплава, содержащего $p\%$ меди? Найти все p , при которых задача имеет решение.

Ответ: $0,8p - 24$ кг; $32 - 0,8p$ кг; $31,25 \leq p \leq 33,75$.

Решение. Если первого сплава берётся x кг, то второго — $(8 - x)$ кг. Условия задачи накладывают ограничения на возможные значения x :

$$\begin{cases} 0 \leq x \leq 3; \\ 0 \leq 8 - x \leq 7 \end{cases} \iff 1 \leq x \leq 3.$$

Подсчитаем количество меди в новом сплаве:

$$0,4x + 0,3(8 - x) = \frac{p}{100} \cdot 8.$$

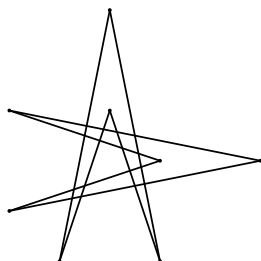
Отсюда $x = 0,8p - 24$. Решив двойное неравенство $1 \leq 0,8p - 24 \leq 3$, получим ответ.

Оценивание. За верное решение 12 б.

2. Какое наибольшее конечное количество точек пересечения могут иметь контуры двух четырёхугольников?

Ответ: 16.

Решение. Наибольшее конечное число точек пересечения получится, если каждая сторона первого четырёхугольника пересечёт каждую сторону второго четырёхугольника, что возможно, как показывает рис.



Оценивание. За верное решение 12 б. Если указано, что количество точек не больше 16, но примера нет, 4 б. Если есть пример, но нет оценки, 8 б.

3. У Нильса гусиная ферма. Нильс подсчитал, что если продать 75 гусей, то корм закончится на 20 дней позже, чем если гусей не продавать. Если же купить дополнительно 100 гусей, то корм закончится на 15 дней раньше, чем если такую покупку не совершать. Сколько гусей у Нильса?

Ответ: 300.

Решение. пусть A — общее количество корма (в кг), x — количество корма на одного гуся в день (в кг), n — количество гусей, k — количество дней, на которые хватит корма. Тогда

$$A = kxn = (k + 20)x(n - 75) = (k - 15)x(n + 100);$$

$$kn = (k + 20)(n - 75) = (k - 15)(n + 100).$$

Решая полученную систему двух уравнений с двумя переменными, находим, что $k = 60$, $n = 300$.

Оценивание. За верное решение 12 б. Если система составлена, но не решена, 4 б.

4. Могут ли числа $x^2 + 2y$ и $y^2 + 2x$, где x и y — натуральные числа, одновременно быть квадратами целых чисел?

Ответ: нет.

Решение. Наименьший квадрат, больший x^2 , это $(x + 1)^2$. Поэтому в случае положительного ответа на вопрос задачи, $x^2 + 2y \geq (x + 1)^2$, откуда $2y \geq 2x + 1$. Аналогично получаем $2x \geq 2y + 1$. Ясно, что два полученных неравенства противоречат друг другу.

Оценивание. За верное решение 14 б.



Многопрофильная инженерная олимпиада
«Звезда»
по естественным наукам
Заключительный этап
2016–2017 уч. год

Задания, ответы и критерии оценивания

8 класс
Вариант II

1. Имеются 4 кг сплава меди с оловом, в котором 40% меди и 6 кг другого сплава меди с оловом, в котором 30% меди. Какой массы нужно взять куски этих сплавов, чтобы после переплавки получить 8 кг сплава, содержащего $p\%$ меди? Найти все p , при которых задача имеет решение.

Ответ: $0,8p - 24$ кг; $32 - 0,8p$ кг; $32,5 \leq p \leq 35$.

Решение. Если первого сплава берётся x кг, то второго — $(8 - x)$ кг. Условия задачи накладывают ограничения на возможные значения x :

$$\begin{cases} 0 \leq x \leq 4; \\ 0 \leq 8 - x \leq 6 \end{cases} \iff 2 \leq x \leq 4.$$

Подсчитаем количество меди в новом сплаве:

$$0,4x + 0,3(8 - x) = \frac{p}{100} \cdot 8.$$

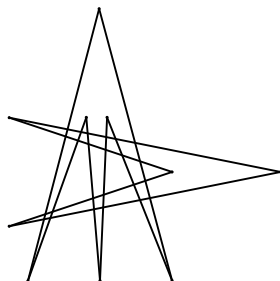
Отсюда $x = 0,8p - 24$. Решив двойное неравенство $2 \leq 0,8p - 24 \leq 4$, получим ответ.

Оценивание. За верное решение 12 б.

2. Какое наибольшее конечное количество точек пересечения могут иметь контуры четырёхугольника и шестиугольника?

Ответ: 24.

Решение. Наибольшее конечное число точек пересечения получится, если каждая сторона четырёхугольника пересечёт каждую сторону шестиугольника, что возможно, как показывает рис.



Оценивание. За верное решение 12 б. Если указано, что количество точек не больше 24, но примера нет, 4 б. Если есть пример, но нет оценки, 8 б.

3. У Нильса гусиная ферма. Нильс подсчитал, что если продать 50 гусей, то корм закончится на 20 дней позже, чем если гусей не продавать. Если же купить дополнительно 100 гусей, то корм закончится на 10 дней раньше, чем если такую покупку не совершать. Сколько гусей у Нильса?

Ответ: 300.

Решение. пусть A — общее количество корма (в кг), x — количество корма на одного гуся в день (в кг), n — количество гусей, k — количество дней, на которые хватит корма. Тогда

$$A = kxn = (k + 20)x(n - 50) = (k - 10)x(n + 100);$$

$$kn = (k + 20)(n - 50) = (k - 10)(n + 100).$$

Решая полученную систему двух уравнений с двумя переменными, находим, что $k = 20$, $n = 100$.

Оценивание. За верное решение 12 б. Если система составлена, но не решена, 4 б.

4. Могут ли числа $x^2 + y$ и $y^2 + x$, где x и y — натуральные числа, одновременно быть квадратами целых чисел?

Ответ: нет.

Решение. Наименьший квадрат, больший x^2 , это $(x + 1)^2$. Поэтому в случае положительного ответа на вопрос задачи, $x^2 + y \geq (x + 1)^2$, откуда $y \geq 2x + 1$. Аналогично получаем $x \geq 2y + 1$. Ясно, что два полученных неравенства противоречат друг другу.

Оценивание. За верное решение 14 б.