



Многопрофильная инженерная олимпиада
«Звезда»
по естественным наукам
Заключительный этап
2016–2017 уч. год

Задания, ответы и критерии оценивания

7 класс

Вариант I

1. Кран с холодной водой заполняет ванну за 17 мин, а с горячей за 23 мин. Открыли кран с горячей водой. Через сколько минут нужно открыть кран с холодной водой, чтобы к тому моменту, как ванна будет заполнена полностью, в ней холодной и горячей воды было поровну?

Ответ: через 3 минуты.

Решение. Половина ванны заполняется горячей водой за 11,5 минут, а холодной водой за 8,5 минут. Значит, кран с горячей водой должен быть открыт на 3 минуты дольше.

Оценивание. За верное решение 12 б.

2. На прямой отметили несколько точек, в том числе точки A и B . Рассматриваются всевозможные отрезки с концами в отмеченных точках. Вася подсчитал, что точка A находится внутри 40 из этих отрезков, а точка B внутри 42 отрезков. Сколько точек было отмечено? (Концы отрезка не являются его внутренними точками.)

Ответ: 14.

Решение. Пусть по одну сторону от точки A находится a_1 точек, а по другую a_2 точек; по одну сторону точки B b_1 точек, а по другую b_2 точек. Можно считать, что $a_1 \leq a_2$, $b_1 \leq b_2$. Тогда $a_1 a_2 = 40$, $b_1 b_2 = 42$. При этом $a_1 + a_2 = b_1 + b_2$. Переберём всевозможные варианты разложения на множители чисел 40 и 42:

$$40 = 1 \cdot 40 = 2 \cdot 20 = 4 \cdot 10 = 5 \cdot 8; \quad 42 = 1 \cdot 42 = 2 \cdot 21 = 3 \cdot 14 = 6 \cdot 7.$$

Только в одном случае совпали суммы делителей этих двух чисел: $5 + 8 = 6 + 7$. Значит, $a_1 = 5$, $a_2 = 8$, $b_1 = 6$, $b_2 = 7$, а всего 14 точек.

Оценивание. За верное решение 12 б. За верный ответ (без обоснования) 2 б. Если показана правильность ответа, но не обоснована его единственность, 6 б.

3. Найдите сумму всех четырёхзначных чисел, в записи которых отсутствуют цифры 0, 3, 6, 9.

Ответ: $9999 \cdot 6^4 / 2 = 6\,479\,352$.

Решение. Все четырёхзначные числа из условия задачи разбиваются на пары чисел вида $(1111, 8888)$, $(1112, 8887)$, $(1113, 8886)$, \dots $(4555, 5444)$. В каждой паре сумма чисел 9999. Подсчитаем количество пар. Всего четырёхзначных чисел указанного вида 6^4 (поскольку каждая цифра выбирается 4 способами). Значит, пар вдвое меньше. Сумма всех чисел равна $9999 \cdot 6^4 / 2 = 6\,479\,352$.

Оценивание. За верное решение 12 б. Ответ может быть представлен и формулой $9999 \cdot 6^4 / 2$. Если формула верная, но арифметические ошибки при вычислении по этой формуле, 10 б.

4. Какую наибольшую длину может иметь замкнутая самонепересекающаяся ломаная, идущая по линиям сетки клетчатого поля размером 8×8 ?

Ответ: 80.

Решение. Раскрасим узлы сетки в шахматном порядке в чёрный и белый цвет. Длина замкнутой самонепересекающейся ломаной равна количеству узлов, через которые она проходит. Каждое звено ломаной соединяет чёрный и белый узел. При обходе ломаной цвета узлов чередуются, поэтому длина замкнутой ломаной является чётным числом. Поскольку всего в сетке 81 узел, длина ломаной не более 80. Соответствующий пример легко строится (рис. 1).

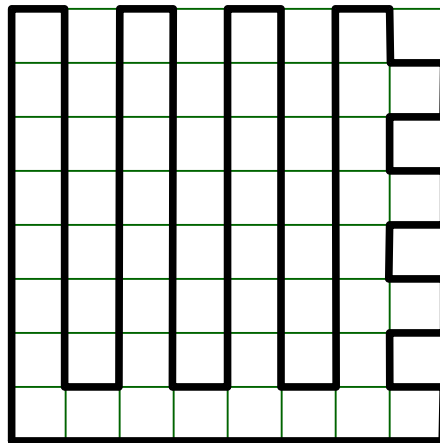


Рис. 1

Замечание. Возможно и такое рассуждение. Начнём строить замкнутую ломаную начиная с какого-то узла. Поскольку мы должны в него вернуться, горизонтальных шагов вправо столько же, сколько и влево. Значит, горизонтальных шагов чётное число. То же верно и по отношению к вертикальным шагам. Отсюда вновь получаем, что длина замкнутой ломаной (звенья которой идут по линиям по линиям сетки) является чётным числом.

Оценивание. За верное решение 14 б. Если есть только ответ, 1 б. Если приведён пример ломаной длиной 80, но нет оценки на длину ломаной, 4 б.



Многопрофильная инженерная олимпиада
«Звезда»
по естественным наукам
Заключительный этап
2016–2017 уч. год

Задания, ответы и критерии оценивания

7 класс

Вариант II



1. Кран с холодной водой заполняет ванну за 19 мин, а с горячей за 23 мин. Открыли кран с горячей водой. Через сколько минут нужно открыть кран с холодной водой, чтобы к тому моменту, как ванна будет заполнена полностью, в ней холодной и горячей воды было поровну?

Ответ: через 2 минуты.

Решение. Половина ванны заполняется горячей водой за 11,5 минут, а холодной водой за 9,5 минут. Значит, кран с горячей водой должен быть открыт на 2 минуты дольше.

Оценивание. За верное решение 12 б.

2. На прямой отметили несколько точек, в том числе точки A и B . Рассматриваются всевозможные отрезки с концами в отмеченных точках. Вася подсчитал, что точка A находится внутри 50 из этих отрезков, а точка B внутри 56 отрезков. Сколько точек было отмечено? (Концы отрезка не являются его внутренними точками.)

Ответ: 16.

Решение. Пусть по одну сторону от точки A находится a_1 точек, а по другую a_2 точек; по одну сторону точки B b_1 точек, а по другую b_2 точек. Можно считать, что $a_1 \leq a_2$, $b_1 \leq b_2$. Тогда $a_1 a_2 = 50$, $b_1 b_2 = 56$. При этом $a_1 + a_2 = b_1 + b_2$. Переберём всевозможные варианты разложения на множители чисел 50 и 56:

$$50 = 1 \cdot 50 = 2 \cdot 25 = 5 \cdot 10; \quad 56 = 1 \cdot 56 = 2 \cdot 28 = 4 \cdot 14 = 7 \cdot 8.$$

Только в одном случае совпали суммы делителей этих двух чисел: $5 + 10 = 7 + 8$. Значит, $a_1 = 5$, $a_2 = 10$, $b_1 = 7$, $b_2 = 8$, а всего 16 точек.

Оценивание. За верное решение 12 б. За верный ответ (без обоснования) 2 б. Если показана правильность ответа, но не обоснована его единственность, 6 б.

3. Найдите сумму всех четырёхзначных чисел, в записи которых отсутствуют цифры 0, 4, 5, 9.

Ответ: $9999 \cdot 6^4 / 2 = 6\,479\,352$.

Решение. Все четырёхзначные числа из условия задачи разбиваются на пары чисел вида (1111, 8888), (1112, 8887), (1113, 8886), ... (4555, 5444). В каждой паре сумма чисел 9999. Подсчитаем количество пар. Всего четырёхзначных чисел указанного вида 6^4 (поскольку каждая цифра выбирается 4 способами). Значит, пар вдвое меньше. Сумма всех чисел равна $9999 \cdot 6^4 / 2 = 6\,479\,352$.

Оценивание. За верное решение 12 б. Ответ может быть представлен и формулой $9999 \cdot 6^4 / 2$. Если формула верная, но арифметические ошибки при вычислении по этой формуле, 10 б.

4. Какую наибольшую длину может иметь замкнутая самонепересекающаяся ломаная, идущая по линиям сетки клетчатого поля размером 6×10 ?

Ответ: 76.

Решение. Раскрасим узлы сетки в шахматном порядке в чёрный и белый цвет. Длина замкнутой самонепересекающейся ломаной равна количеству узлов, через которые она проходит. Каждое звено ломаной соединяет чёрный и белый узел. При обходе ломаной цвета узлов чередуются, поэтому длина замкнутой ломаной является чётным числом. Поскольку всего в сетке 77 узлов, длина ломаной не более 76. Соответствующий пример легко строится (рис. 2).

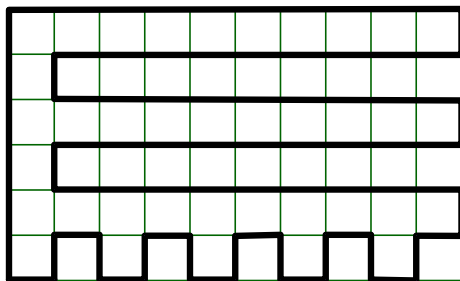


Рис. 2

Замечание. Возможно и такое рассуждение. Начнём строить замкнутую ломаную начиная с какого-то узла. Поскольку мы должны в него вернуться, горизонтальных шагов вправо столько же, сколько и влево. Значит, горизонтальных шагов чётное число. То же верно и по отношению к вертикальным шагам. Отсюда вновь получаем, что длина замкнутой ломаной (звенья которой идут по линиям по линиям сетки) является чётным числом.

Оценивание. За верное решение 14 б. Если есть только ответ, 1 б. Если приведён пример ломаной длиной 76, но нет оценки на длину ломаной, 4 б.