Многопрофильная инженерная олимпиада «ЗВЕЗДА»

Естественные науки (физика, математика)

ОЧНЫЙ ТУР

Задания, решения, критерии оценивания

2015-2016

Олимпиада школьников «Звезда»
Задачи по математике
6 марта 2016 г.
Решения и критерии оценивания

9 класс
Вариант 1

1. У старшего брата на 25% денег больше, чем у младшего. Какую долю своих денег должен старший отдать младшему, чтобы денег у них стало поровну?

Ответ: 1/10 или 10%.

Решение. Пусть у младшего x рублей. Тогда у старшего $1{,}25x$ рублей. Чтобы денег у них стало поровну, старший должен отдать младшему $0{,}125x$ рублей, что составляет 10% его денег.

Оценивание. За верное решение 10 баллов. Если в решении будет написано: «Пусть, к примеру, у младшего 100 руб. Тогда...», баллы не снижать!

2. Петя записал на доске натуральное число, а Вася стёр в нём первые две цифры. В результате число уменьшилось в 149 раз. Каким может быть Петино число, если известно, что оно нечётное?

Ответ: 745 или 3725.

Решение. Петино число представим в виде $10^k a + b$, где $10 \leqslant a \leqslant 99$, $b < 10^k$. По условию, $10^k a + b = 149b$. Отсюда $10^k a = 37 \cdot 4b$. Поскольку 10^k и 37 взаимно простые числа, число a должно делиться на 37. Из двухзначных чисел таким свойством обладают только 37 и 74.

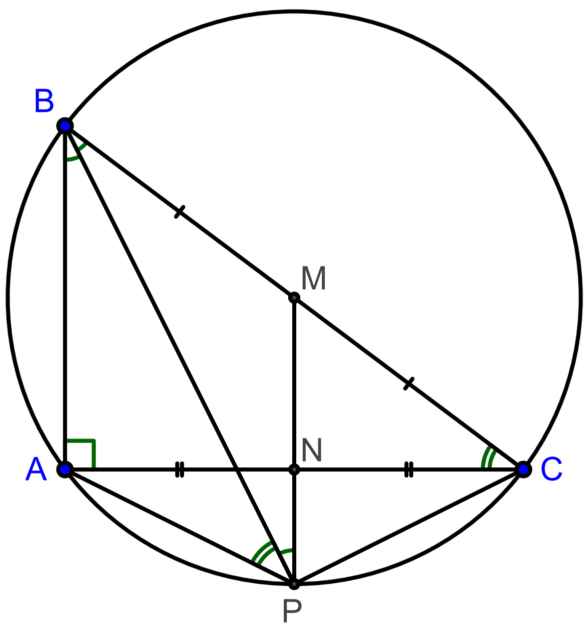
Если $a = 37$, то $10^k = 4b$. Поскольку b нечётно, 10^k делится на 4, но не делится на 8. Стало быть, $k = 2$, $b = 25$, а искомое число 3725.

Если $a = 74$, то $10^k = 2b$. Поскольку b нечётно, 10^k делится на 2, но не делится на 4. Стало быть, $k = 1$, $b = 5$, а искомое число 745.

Оценивание. За верное решение 13 баллов. При отсутствии обоснований, что других решений нет, за каждый найденный ответ по 2 б.

3. ABC — прямоугольный треугольник, M — середина гипотенузы BC, N — середина катета AC, P — точка пересечения биссектрисы угла B и прямой MN. Докажите равенство углов BCA и BPA.

Доказательство. MN — средняя линия треугольника ABC. Поэтому прямые AB и MN параллельны, а углы MPB и ABP равны как накрест лежащие. К тому же $\angle ABP = \angle PBM$ (по определению биссектрисы). Значит, $\angle MPB = \angle PBM$, отсюда треугольник BMP равнобедренный: $BM = MP$.



По условию, $BM = MC$. Стало быть, точка M равноудалена от вершин треугольника BCP, т. е. M — центр описанной окружности, а лежит M на стороне этого треугольника. Поэтому треугольник BPC — прямоугольный, а точки P и A лежат на окружности с диаметром BC. Углы BCA и BPA равны как опирающиеся на одну дугу.

Оценивание. За верное решение 13 баллов.

4. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x^2 + y^2 & = & 1; \\ x^3 + y^5 & = & 1. \end{cases}$$

Ответ: $(0; 1)$, $(1; 0)$.

Решение. Вычтем из второго уравнения первое:

$$x^2(x-1) + y^2(y^3-1) = 0. \qquad (*)$$

Из первого уравнения системы следует, что $x \leqslant 1$ и $y \leqslant 1$. Поэтому $x^2(x-1) \leqslant 0$ и $y^2(y^3-1) \leqslant 0$. Сумма двух неотрицательных чисел равна нулю тогда и только тогда, когда они оба равны нулю. Если первое слагаемое в левой части уравнения $(*)$ равно нулю, то $x = 0$ или $x = 1$. В первом случае из исходной системы следует, что $y = 1$. А во втором случае, очевидно, $y = 0$.

Оценивание. За верное решение 14 баллов. Если ответ угадан, но не доказано, что нет других решений, 2 балла.

Многопрофильная инженерная олимпиада «Звезда»

«Естественные науки»

Задачи по физике.

2015/16уч.г.

Задача №1 (15 баллов)

Два одинаковых автомобиля едут в одну сторону. Скорость одного $36\ км/ч$, а другой его догоняет со скоростью $54\ км/ч$. Известно, что время реакции водителя заднего автомобиля на включение стоп-сигналов переднего составляет $2\ с$. Какова должна быть дистанция между автомобилями, чтобы они не столкнулись, если первый водитель решил резко затормозить? Для автомобиля подобной марки тормозной путь составляет 40 метров со скорости $72\ км/ч$.

Решение:

Переведем все скорости в единицы СИ:

$36\ км/ч = 10\ м/с$

$54\ км/ч = 15\ м/с$ **(1 балл)**

$72\ км/ч = 20\ м/с$

Ускорение автомобиля подобной марки:

$$a = \frac{v^2}{2S} = \frac{20^2}{2 \cdot 40} = 5\ м/с^2$$ **(3 балла)**

Расстояние, пройденное первым автомобилем до остановки:

$$S_1 = \frac{v_2^2}{2a} = \frac{10^2}{2 \cdot 5} = 10\ м$$ **(3 балла)**

Расстояние, пройденное вторым автомобилем до остановки:

$$S_2 = v_2 \cdot 2 + \frac{v_2^2}{2a} = 15 \cdot 2 + \frac{15^2}{2 \cdot 5} = 30 + 22{,}5 = 52{,}5\ м$$ **(5 баллов)**

Следовательно, **дистанция между автомобилями должна быть не менее:**

$l = S_2 - S_1 = 52{,}5 - 10 = 42{,}5\ метров$ **(3 балла)**

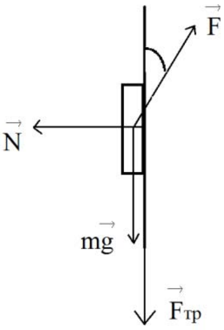
Задача №2 (15 баллов)

Брусок массой $m = 1\ кг$ прикладывают к вертикальной стенке. Коэффициент трения между бруском и стенкой $\mu = 0{,}1$. Определить силу, которую необходимо прикладывать к бруску под углом $\alpha = 60^{o}$ к стенке для удержания бруска в равновесии.

Решение:

Необходимо рассмотреть две ситуации:

Первая:



Второй закон Ньютона в проекциях на оси:

$F\sin 60^{o} = N$ **(2 балла)**

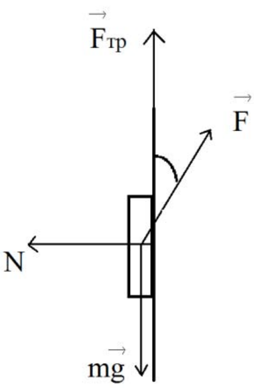
$F\cos 60^{o} = mg + F_{TP}$ **(2 балла)**

с учетом того, что $F_{TP} = \mu N$, получаем:

$F\cos 60^{o} = mg + \mu F\sin 60^{o}$

$F \approx 24{,}18\ H$ **(2 балла)**

Вторая:



Второй закон Ньютона в проекциях на оси:

$F\sin 60^{o} = N$ **(2 балла)**

$F\cos 60^{o} + F_{TP} = mg$ **(2 балла)**

с учетом того, что $F_{TP} = \mu N$, получаем:

$F\cos 60^{o} + \mu F\sin 60^{o} = mg$

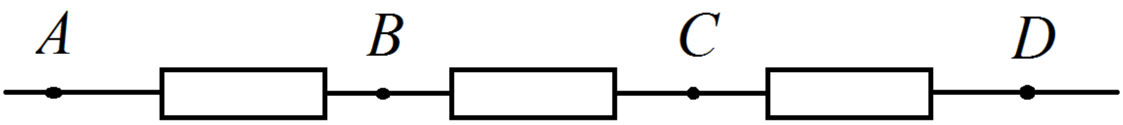
$F \approx 17{,}05\ H$ **(2 балла)**

Окончательный ответ:

$17{,}05\ H \le F \le 24{,}18\ H$ **(3 балла)**

Задача №3 (10 баллов)

Представленная на рисунке схема составлена из одинаковых резисторов. Если точку A соединить с точкой C, а точку B – с точкой D, то сопротивление схемы изменится на $10\ Ом$. Определить сопротивление одного резистора. Для соединения точек использовались перемычки с нулевым сопротивлением.



Решение:

Если сопротивление одного резистора R, то начальное общее сопротивление последовательного соединения равно $3R$ **(1 балл)**

После того как были задействованы перемычки, мы получаем параллельное соединение трех резисторов. **(4 балла)**

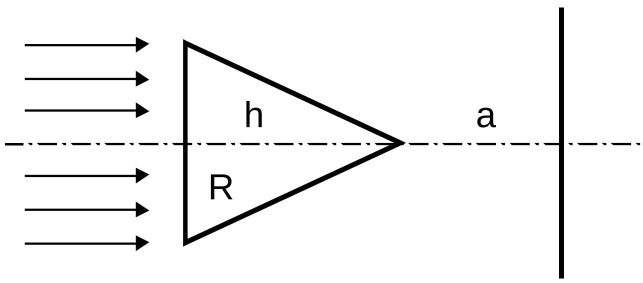
В этом случае их общее сопротивление равно $\frac{R}{3}$ **(1 балл)**

По условию: $3R - \frac{R}{3} = 10$ **(2 балла)**

Окончательный результат: $R = 3{,}75\ Ом$ **(2 балла)**

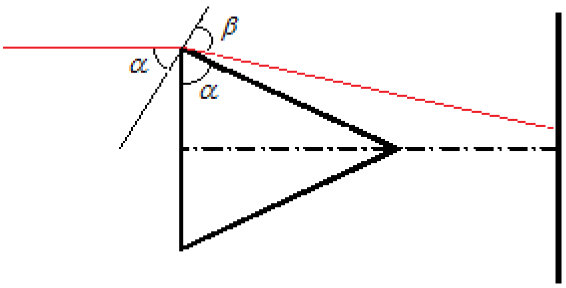
Задача №4 (10 баллов)

Параллельный пучок света падает на основание стеклянного конуса (показатель преломления $n = 1{,}5$) вдоль его оси (см. рис.). Сечение пучка совпадает с основание конуса, радиус



которого $R = 1\ см$. Высота конуса $h = 1{,}73\ см$. Определить площадь светлого пятна на экране, перпендикулярном оси конуса и расположенном на расстоянии $a = 1\ см$ от вершины конуса.

Решение:



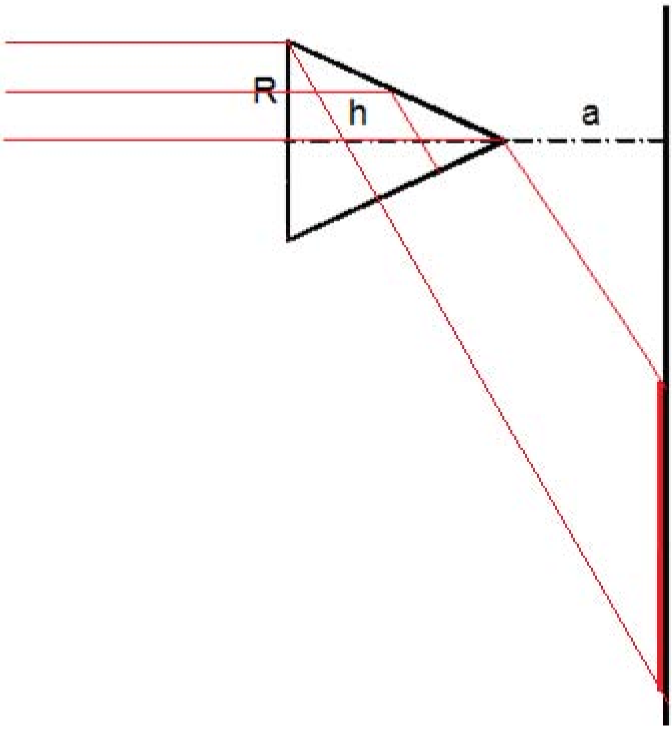
$tg\alpha = \frac{h}{R} = 1{,}73$, т.е. $\alpha = 60^O$ **(1 балл)**

Закон преломления для лучей проходящих через конус:

$$\frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = \frac{1}{1{,}5}$$

В результате: $\sin\beta = \frac{3\sqrt{3}}{4} \geq 1$ **(2 балла)**

Получаем, что лучи проходящие через конус испытывают полное отражение.



Из геометрических соображений выясняется, что на другую грань конуса они падают по нормали. **(2 балла)**

Следовательно, световое пятно на экране ограниченно двумя окружностями с радиусами:

$$R_1 = a \cdot tg60^O = 0{,}01\sqrt{3} = 0{,}0173 \text{ м}$$ **(2 балл)**

$$R_2 = ((h + a) \cdot tg60^O) - R = 0{,}0273\sqrt{3} - 0{,}01 = 0{,}0373 \text{ м}$$ **(2 балл)**

Получаем:

$$S = \pi R_2^2 - \pi R_1^2 = 0{,}0034 \text{ м}^2 = 34 \text{ см}^2$$ **(1 балл)**

Многопрофильная инженерная олимпиада «Звезда»
ЕСТЕСТВЕННЫЕ НАУКИ
2016

29 марта 2016 года

ПРОТОКОЛ № 1
заседания жюри

ПРИСУТСТВОВАЛИ: Келлер А.В., Заляпин В.И., Замышляева А.А., Воронцов А.Г., Куц Д.А., Гусев А.В.

СЛУШАЛИ: о распределении баллов победителей и призеров олимпиады

ПОСТАНОВИЛИ:

11 класс
− считать победителями олимпиады и наградить дипломами 1 степени участников, набравших 100 − 90 баллов;
− считать призерами олимпиады и наградить дипломами 2 степени участников, набравших 89 – 70 баллов;
− считать призерами олимпиады и наградить дипломами 3 степени участников, набравших 69 – 45 баллов.

10 класс
− считать победителями олимпиады и наградить дипломами 1 степени участников, набравших 100 – 95 баллов;
− считать призерами олимпиады и наградить дипломами 2 степени участников, набравших 94 – 70 баллов;
− считать призерами олимпиады и наградить дипломами 3 степени участников, набравших 69 – 40 баллов.

9 класс
− считать победителями олимпиады и наградить дипломами 1 степени участников, набравших 100 – 90 баллов;
− считать призерами олимпиады и наградить дипломами 2 степени участников, набравших 89 – 70 баллов;
− считать призерами олимпиады и наградить дипломами 3 степени участников, набравших 69 – 40 баллов.

8 класс
− считать победителями олимпиады и наградить дипломами 1 степени участников, набравших 100 – 75 баллов;
− считать призерами олимпиады и наградить дипломами 2 степени участников, набравших 74 – 65 баллов;
− считать призерами олимпиады и наградить дипломами 3 степени участников, набравших 64 – 40 баллов.

7 **класс**
− считать победителями олимпиады и наградить дипломами 1 степени участников, набравших 100 − 90 баллов;
− считать призерами олимпиады и наградить дипломами 2 степени участников, набравших 89 – 70 баллов;
− считать призерами олимпиады и наградить дипломами 3 степени участников, набравших 69 – 40 баллов.

6 **класс**
− считать победителями олимпиады и наградить дипломами 1 степени участников, набравших 100 − 90 баллов;
− считать призерами олимпиады и наградить дипломами 2 степени участников, набравших 89 – 80 баллов;
− считать призерами олимпиады и наградить дипломами 3 степени участников, набравших 79 – 40 баллов.

Председатели жюри:

_______________________ Келлер А.В.

_______________________ Воронцов А.Г.