Многопрофильная инженерная олимпиада «ЗВЕЗДА»

Естественные науки (физика, математика)

ОЧНЫЙ ТУР

Задания, решения, критерии оценивания

2015-2016

Олимпиада школьников «Звезда»
Задачи по математике
6 марта 2016 г.
Решения и критерии оценивания

11 класс
Вариант 1

1. Вычислите площадь поверхности

$$x^2 + y^2 + z^2 = 4(x + y + z).$$

Ответ: 48π.

Решение. Если переписать уравнение в виде

$$(x-2)^2 + (y-2)^2 + (z-2)^2 = 12,$$

легко можно заметить, что оно задаёт сферу, квадрат радиуса которой равен 12.

Оценивание. За верное решение 10 баллов. Если найдено, что поверхность — сфера радиусом $2\sqrt{3}$, но ошибка из-за незнания формулы площади сферы, 5 баллов.

2. В точках пересечения графика функции $y = \frac{20x^2-16x+1}{5x-2}$ с осью Ox провели касательные к этому графику. Найдите углы наклона этих прямых к оси Ox.

Ответ: $\operatorname{arctg} 8$.

Решение. График функции $y = \dfrac{20x^2-16x+1}{5x-2}$ пересекает ось абсцисс в двух точках x_1 и x_2. Найдём производную функции в этих точках:

$$y'(x_i) = \frac{8(5x_i-2)^2 - 5(20x_i^2-16x_i+1)}{(5x_i-2)^2} = 8,$$

поскольку $20x_i^2 - 16x_i + 1 = 0$.

Оценивание. За верное решение 12 баллов. Если верно найдены производная и точки пересечения графика с осью Ox, но есть ошибки в арифметических выкладках, 6 баллов.

3. Решите уравнение

$$2x^3 = (2x^2 + x - 1)\sqrt{x^2 - x + 1}.$$

Ответ: 1; $\frac{-1-\sqrt{13}}{6}$.

Первое решение. Пусть $t = \sqrt{x^2-x+1}$. Тогда $x-1 = x^2-t^2$, а исходное уравнение можно переписать в виде $2x^3 = (3x^2-t^2)t$. Очевидно, $x = 0$ не является корнем исходного уравнения. Поделим последнее уравнение на x^3. Относительно новой переменной $y = \frac{t}{x}$ получится уравнение $y^3 - 3y + 2 = 0$. Заметим, что

$y^3-3y+2=(y-1)^2(y+2)$. Поэтому $y=1$ или $y=-2$. В первом случае получаем $\sqrt{x^2-x+1}=x$, откуда $x=1$. Во втором случае возникает уравнение $\sqrt{x^2-x+1}=-2x$, равносильное выполнению двух соотношений:

$$3x^2+x-1=0; \quad x \leqslant 0.$$

Поэтому нужно выбрать отрицательный корень полученного квадратного уравнения.

Второе решение. Пусть $x>0$. Поделим обе части исходного уравнения на x^3. Поскольку в этом случае $\sqrt{x^2}=x$, получим

$$2=(2+\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2})\sqrt{1-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}.$$

Замена $t=\sqrt{1-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}$ (заметим, что $t>0$) даёт уравнение $2=(3-t^2)t$, единственный положительный корень которого $t=1$. Возращаясь к переменной x, находим положительный корень исходного уравнения $x=1$.

Пусть теперь $x<0$. Поделим обе части исходного уравнения на x^3. Поскольку в этом случае $\sqrt{x^2}=-x$, получим

$$2=-(2+\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2})\sqrt{1-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}.$$

Замена $t=\sqrt{1-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}$ (заметим, что $t>0$) даёт уравнение $2=-(3-t^2)t$, единственный положительный корень которого $t=2$. Возращаясь к переменной x, находим отрицательный корень исходного уравнения.

Оценивание. За верное решение 14 баллов. Если просто угадан корень $x=1$, 1 балл. Если найден корень $x=1$ (так, как это показано во 2-м способе решения) и потерян отрицательный корень (из-за того, что неявно предполагалось, что $x>0$), 4 балла.

4. 20 шариков одинаковой массы с одинаковыми скоростями двигаются по жёлобу по направлению к металлической стенке. Навстречу им с такой же скоростью двигаются 16 шариков той же массы. При столкновении двух шариков они разлетаются с той же скоростью. После столкновения со стенкой шарик отскакивает от неё с той же скоростью. (Шарики двигаются только по жёлобу). Сколько будет соударений шариков между собой?

Ответ: 510.

Решение. Будем считать, что изначально у каждого шарика, двигающегося к стенке, красный флажок, а у остальных шариков синие флажки. Представим, что при столкновении шарики обмениваются флажками. Тогда каждый синий флажок двигается с постоянной скоростью в одном направлении (от стенки), а каждый красный долетает до стенки, после чего летит в противоположном направлении. Количество соударений шариков равно количеству обменов флажками. Каждый красный флажок один раз поменяется с каждым синим. Любые два красных флажка также единожды поменяются местами. Значит, общее число обменов равно $20 \cdot 16 + \frac{20 \cdot 19}{2} = 510$.

Оценивание. За верное решение 14 баллов.

Многопрофильная инженерная олимпиада «Звезда»

«Естественные науки»

Задачи по физике.

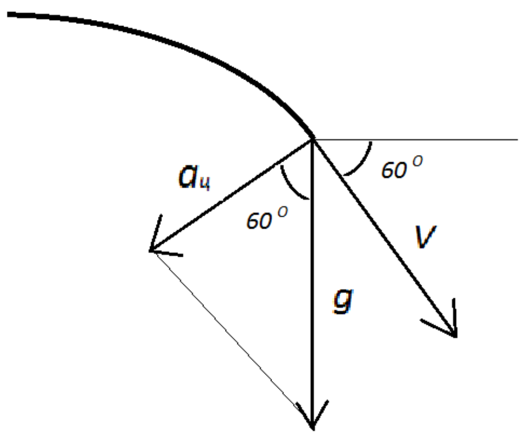
2015/16уч.г.

Задача №1 (10 баллов)

Камень брошен с поверхности Земли под углом 60^O к горизонту с начальной скоростью $v_0 = 10\ м/с$. Определить радиус кривизны траектории в конечной точке полета. Ускорение свободного падения $g = 10\ м/с^2$.

Решение:

Конечная скорость камня равна его начальной скорости: **(3 балла)**



Центростремительное ускорение в конечной точке полета:

$a_Ц = g \cdot \cos 60^O = 5\ м/с^2$ **(4 балла)**

Радиус кривизны траектории в конечной точке полета:

$R = \dfrac{v^2}{a_Ц} = \dfrac{10^2}{5} = 20\ м$ **(3 балла)**

Задача №2 (10 баллов)

В вертикальном сосуде с прямыми стенками закрытом поршнем находится вода. Её высота $h = 2\ мм$. Воздуха в сосуде нет. На какую высоту необходимо поднять поршень, для того чтобы вся вода испарилась. Плотность воды $\rho = 1000\ кг/м^3$, молярная масса водяного пара $M = 0{,}018\ кг/моль$, давление насыщенного водяного пара при температуре $T = 50\ ^0C$ равно $p = 12300\ Па$. Температура воды и пара поддерживается постоянной.

Решение:

Масса воды в сосуде:

$m = \rho S h$, где S – площадь основания сосуда. **(2 балла)**

Уравнение состояния идеального газа для водяного пара:

$$pV = \frac{m}{M}RT,$$ **(2 балла)**

где объем занимаемый паром $V = S(h + x)$. **(2 балла)**

В результате получаем:

$$pS(h + x) = \frac{\rho S h}{M}RT$$ **(2 балла)**

Окончательный ответ:

$$x = \frac{\rho h R T}{Mp} - h = \frac{1000 \cdot 0{,}002 \cdot 8{,}31 \cdot 323}{0{,}018 \cdot 12300} - 0{,}002 = 24{,}2\ м$$ **(2 балла)**

Задача №3 (15 баллов)

Имеется источник тока с внутренним сопротивлением $r = 20\ Ом$. Какое внешнее сопротивление нужно подключить к источнику, чтобы мощность, выделяющаяся на внешнем сопротивлении, отличалась от максимально возможной на $25\ \%$?

Решение:

Мощность тока:

$$P = I^2 R = \left(\frac{\varepsilon}{R + r}\right)^2 R$$ **(2 балла)**

Она будет максимальной при $R = r$, т.е.:

$$P_{MAX} = \left(\frac{\varepsilon}{R + r}\right)^2 R = \left(\frac{\varepsilon}{20 + 20}\right)^2 20 = \frac{\varepsilon^2}{80}$$ **(5 баллов)**

Мощность, о которой идет речь, отличается на $25\ \%$, т.е. $P = 0{,}75 \cdot \frac{\varepsilon^2}{80}$. **(2 балла)**

Получаем:

$0{,}75 \cdot \dfrac{\varepsilon^2}{80} = \left(\dfrac{\varepsilon}{R+20}\right)^2 R$ **(3 балла)**

Получили квадратное уравнение, корнями которого являются:

$R_1 = 6{,}7\ Ом$

$R_2 = 60\ Ом$ **(3 балла)**

Задача №4 (15 баллов)

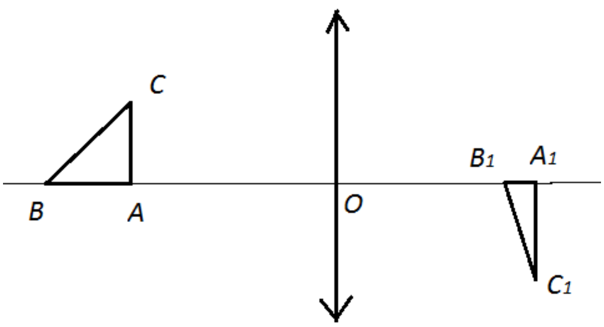
Прямоугольный равнобедренный треугольник располагается недалеко от собирающей линзы таким образом, что вершина прямого угла совпадает с двойным фокусом линзы, а один из катетов перпендикулярен главной оптической оси. Известно, что площадь треугольника $8\ см^2$, а площадь изображения ровно в два раза меньше. Определить фокусное расстояние линзы.

Решение:

Площадь треугольника:

$S = \dfrac{1}{2} AB \cdot AC$, отсюда $AB = BC = 4\ см$ **(3 балла)**

Можно сделать вывод, что исходный треугольник, его изображение и линза располагаются следующим образом: **(3 балла)**



Точка A в двойном фокусе, следовательно, $A_1C_1 = AC = 4\ см$ **(2 балла)**

Площадь треугольника $A_1B_1C_1$:

$S_1 = \dfrac{1}{2} S = 4\ см^2 = \dfrac{1}{2} A_1B_1 \cdot A_1C_1$

Получаем, что $A_1B_1 = 2\ см$ **(2 балла)**

Формула тонкой линзы для точки B и её изображения:

$\dfrac{1}{F} = \dfrac{1}{2F+4} + \dfrac{1}{2F-2}$ **(3 балла)**

Решая это уравнение, **получаем, что:** $F = 4\ см$ **(2 балла)**

!!!Если задача решена правильно, то за отсутствие рисунка баллы не снижать!!!

Многопрофильная инженерная олимпиада «Звезда»
ЕСТЕСТВЕННЫЕ НАУКИ
2016

29 марта 2016 года

ПРОТОКОЛ № 1
заседания жюри

ПРИСУТСТВОВАЛИ: Келлер А.В., Заляпин В.И., Замышляева А.А., Воронцов А.Г., Куц Д.А., Гусев А.В.

СЛУШАЛИ: о распределении баллов победителей и призеров олимпиады

ПОСТАНОВИЛИ:

11 класс
− считать победителями олимпиады и наградить дипломами 1 степени участников, набравших 100 − 90 баллов;
− считать призерами олимпиады и наградить дипломами 2 степени участников, набравших 89 – 70 баллов;
− считать призерами олимпиады и наградить дипломами 3 степени участников, набравших 69 – 45 баллов.

10 класс
− считать победителями олимпиады и наградить дипломами 1 степени участников, набравших 100 – 95 баллов;
− считать призерами олимпиады и наградить дипломами 2 степени участников, набравших 94 – 70 баллов;
− считать призерами олимпиады и наградить дипломами 3 степени участников, набравших 69 – 40 баллов.

9 класс
− считать победителями олимпиады и наградить дипломами 1 степени участников, набравших 100 – 90 баллов;
− считать призерами олимпиады и наградить дипломами 2 степени участников, набравших 89 – 70 баллов;
− считать призерами олимпиады и наградить дипломами 3 степени участников, набравших 69 – 40 баллов.

8 класс
− считать победителями олимпиады и наградить дипломами 1 степени участников, набравших 100 – 75 баллов;
− считать призерами олимпиады и наградить дипломами 2 степени участников, набравших 74 – 65 баллов;
− считать призерами олимпиады и наградить дипломами 3 степени участников, набравших 64 – 40 баллов.

7 **класс**

− считать победителями олимпиады и наградить дипломами 1 степени участников, набравших 100 − 90 баллов;

− считать призерами олимпиады и наградить дипломами 2 степени участников, набравших 89 – 70 баллов;

− считать призерами олимпиады и наградить дипломами 3 степени участников, набравших 69 – 40 баллов.

6 **класс**

− считать победителями олимпиады и наградить дипломами 1 степени участников, набравших 100 − 90 баллов;

− считать призерами олимпиады и наградить дипломами 2 степени участников, набравших 89 – 80 баллов;

− считать призерами олимпиады и наградить дипломами 3 степени участников, набравших 79 – 40 баллов.

Председатели жюри:

______________________ Келлер А.В.

______________________ Воронцов А.Г.