Многопрофильная инженерная олимпиада «ЗВЕЗДА»

Естественные науки (физика, математика)

ОЧНЫЙ ТУР

Задания, решения, критерии оценивания

2015-2016

Олимпиада школьников «Звезда»
Задачи по математике
6 марта 2016 г.
Решения и критерии оценивания

10 класс
Вариант 1

1. Вычислите площадь фигуры, заданной неравенством

$$x^2 + y^2 \leqslant 4(x + y).$$

Ответ: 8π.

Решение. Если переписать неравенство в виде

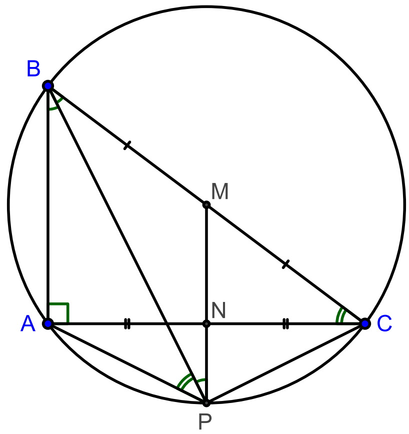
$$(x-2)^2 + (y-2)^2 \leqslant 8,$$

легко можно заметить, что оно задаёт круг, квадрат радиуса которого равен 8.

Оценивание. За верное решение 10 баллов.

2. ABC — прямоугольный треугольник, M — середина гипотенузы BC, N — середина катета AC, P — точка пересечения биссектрисы угла B и прямой MN. Докажите равенство углов BCA и BPA.

Доказательство. MN — средняя линия треугольника ABC. Поэтому прямые AB и MN параллельны, а углы MPB и ABP равны как накрест лежащие. К тому же $\angle ABP = \angle PBM$ (по определению биссектрисы). Значит, $\angle MPB = \angle PBM$, отсюда треугольник BMP равнобедренный: $BM = MP$.



По условию, $BM = MC$. Стало быть, точка M равноудалена от вершин треугольника BCP, т. е. M — центр описанной окружности, а лежит M на стороне этого треугольника. Поэтому треугольник BPC — прямоугольный, а точки P и A лежат на окружности с диаметром BC. Углы BCA и BPA равны как опирающиеся на одну дугу.

Оценивание. За верное решение 12 баллов.

3. Решите уравнение

$$2x^3 = (2x^2 + x - 1)\sqrt{x^2 - x + 1}.$$

Ответ: 1; $\frac{-1-\sqrt{13}}{6}$.

Первое решение. Пусть $t = \sqrt{x^2 - x + 1}$. Тогда $x - 1 = x^2 - t^2$, а исходное уравнение можно переписать в виде $2x^3 = (3x^2 - t^2)t$. Очевидно, $x = 0$ не является корнем исходного уравнения. Поделим последнее уравнение на x^3. Относительно новой переменной $y = \frac{t}{x}$ получится уравнение $y^3 - 3y + 2 = 0$. Заметим, что $y^3 - 3y + 2 = (y-1)^2(y+2)$. Поэтому $y = 1$ или $y = -2$. В первом случае получаем $\sqrt{x^2 - x + 1} = x$, откуда $x = 1$. Во втором случае возникает уравнение $\sqrt{x^2 - x + 1} = -2x$, равносильное выполнению двух соотношений:

$$3x^2 + x - 1 = 0; \quad x \leqslant 0.$$

Поэтому нужно выбрать отрицательный корень полученного квадратного уравнения.

Второе решение. Пусть $x > 0$. Поделим обе части исходного уравнения на x^3. Поскольку в этом случае $\sqrt{x^2} = x$, получим

$$2 = (2 + \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2})\sqrt{1 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}}.$$

Замена $t = \sqrt{1 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}}$ (заметим, что $t > 0$) даёт уравнение $2 = (3 - t^2)t$, единственный положительный корень которого $t = 1$. Возращаясь к переменной x, находим положительный корень исходного уравнения $x = 1$.

Пусть теперь $x < 0$. Поделим обе части исходного уравнения на x^3. Поскольку в этом случае $\sqrt{x^2} = -x$, получим

$$2 = -(2 + \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2})\sqrt{1 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}}.$$

Замена $t = \sqrt{1 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}}$ (заметим, что $t > 0$) даёт уравнение $2 = -(3 - t^2)t$, единственный положительный корень которого $t = 2$. Возращаясь к переменной x, находим отрицательный корень исходного уравнения.

Оценивание. За верное решение 14 баллов. Если просто угадан корень $x = 1$, 1 балл. Если найден корень $x = 1$ (так, как это показано во 2-м способе решения) и потерян отрицательный корень (из-за того, что неявно предполагалось, что $x > 0$), 4 балла.

4. 100 шариков одинаковой массы с одинаковыми скоростями двигаются по жёлобу к металлической стенке. После столкновения со стенкой шарик отскакивает от неё с той же скоростью. При столкновении двух шариков они разлетаются с той же скоростью. (Шарики двигаются только по жёлобу). Найдите общее число соударений шариков между собой.

Ответ: 4950.

Решение. Будем считать, что у каждого шарика есть флажок. Представим, что при столкновении шарики обмениваются флажками. Тогда каждый флажок с постоянной скоростью долетает до стенки, после чего летит в противоположном направлении. Количество соударений шариков равно количеству обменов флажками. Любые два флажка единожды поменяются местами. Значит, общее число обменов равно $\frac{100\cdot 99}{2} = 4950$.

Оценивание. За верное решение 14 баллов.

Многопрофильная инженерная олимпиада «Звезда»

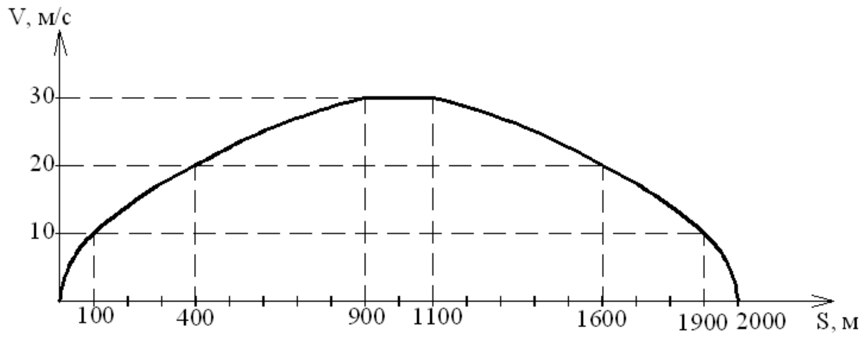
«Естественные науки»

Задачи по физике.

2015/16уч.г.

Задача №1 (15 баллов)

Автомобиль при включении зеленого сигнала светофора трогается с места. При приближении к следующему светофору для него вновь зажигается красный сигнал. На графике приведена зависимость скорости автомобиля от пройденного расстояния. Определить время движения автомобиля между светофорами.



Решение:

На первом участке зависимость скорости от расстояния:

$v^2 \sim S$ **(3 балла)**

Найдем ускорение:

$$a = \frac{v^2}{2S} = 0{,}5\ м/с^2$$ **(3 балла)**

Время, затраченное на этот участок:

$$t_1 = \sqrt{\frac{2S}{a}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 900}{0{,}5}} = 60\ с$$ **(3 балла)**

На втором участке движение равномерное и время:

$$t_2 = \frac{S}{v} = \frac{200}{30} \approx 6{,}7\ c$$ **(2 балла)**

Время движения на последнем участке равно времени движения на первом. **(3 балла)**

Окончательный результат:

$$t = 2t_1 + t_2 = 2 \cdot 60 + 6{,}7 = 126{,}7\ секунды$$ **(1 балл)**

Задача №2 (10 баллов)

2 моля молекулярного кислорода находятся в вертикальном сосуде с гладкими стенками, который закрыт невесомым поршнем. Температура кислорода $T = 300\ K$. В ходе медленного нагревания объем газа увеличился в три раза, при этом $40\ \%$ молекул диссоциировали на атомы. Определить работу, совершенную газом в данном процессе.

Решение:

Раз $40\ \%$ молекул диссоциировали на атомы, следовательно, количество вещества увеличилось в $1{,}4$ раза:

$$\nu_2 = 1{,}4 \cdot \nu_1 = 2{,}8\ моля$$ **(3 балла)**

Процесс – изобарный, следовательно, из уравнения Менделеева-Клапейрона $pV = \nu RT$ следует, что:

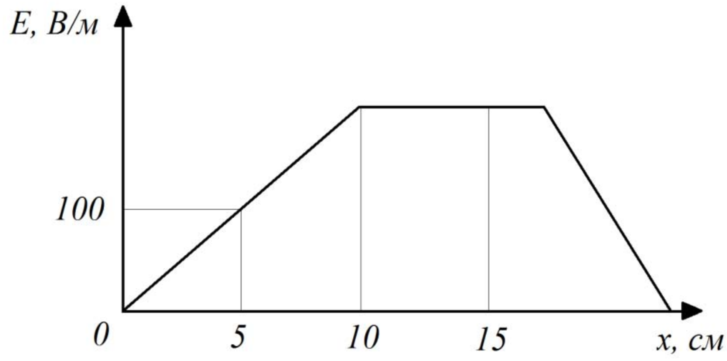
$$T_2 = \frac{30}{14} T_1 = \frac{30 \cdot 300}{14} \approx 643\ K$$ **(3 балла)**

Работа газа в данном процессе:

$$A = p\Delta V = \nu_2 R T_2 - \nu_1 R T_1 = (2{,}8 \cdot 8{,}31 \cdot 643) - (2 \cdot 8{,}31 \cdot 300) \approx 9975\ Дж$$ **(4 балла)**

Задача №3 (10 баллов)

В пространстве создано электрическое поле, напряженность которого от координаты зависит следующим образом (см. рисунок).



Данное поле переместило частицу массой $1\ мг$ и зарядом $1\ мКл$ из точки с координатой $5\ см$ в точку с координатой $15 см$. Определить скорость заряда в конечной точке, если в начальной точке она покоилась.

Решение:

Напряженность в точке с координатой $10\ см$ равна $200\ В/м$ **(2 балла)**

Разность потенциалов конечной и начальной точек равна площади под графиком:

$$\Delta\varphi = (\frac{100+200}{2}\cdot 0{,}05) + (200\cdot 0{,}05) = 17{,}5\ В$$ **(3 балла)**

Работа электрического поля равна кинетической энергии, приобретенной зарядом:

$$q\Delta\varphi = \frac{mv^2}{2}$$ **(3 балла)**

Откуда скорость заряда:

$$v = \sqrt{\frac{2q\Delta\varphi}{m}} = \sqrt{\frac{2\cdot 10^{-3}\cdot 17{,}5}{10^{-6}}} \approx 187\ м/с$$ **(2 балла)**

Задача №4 (15 баллов)

Предмет расположили перед двояковыпуклой линзой. В результате было получено изображение, размеры которого совпадали с размером предмета. После того как линзу заменили на двояковогнутую, радиусы кривизны поверхностей которой равны радиусам исходной линзы, изображение предмета сдвинулось на $240\ см$. Определить оптическую силу исходной линзы. Материалы линз одинаковые. Предмет с места не сдвигали.

Решение:

Исходная линза является собирающей, причем предмет располагается в её двойном фокусе. **(3 балла)**)

Вторая линза является рассеивающей, причем из формулы $D=(n-1)(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2})$ следует, что у неё такая же по модулю оптическая сила. **(3 балла)**

Формула тонкой линзы во втором случае:

$$-\frac{1}{F}=\frac{1}{2F}-\frac{1}{f}$$ **(3 балла)**

Кроме того, из условия следует:

$$2F+f=2{,}4$$ **(3 балла)**

Решая эту систему, получаем, что: $F=0{,}9\ м$

Оптическая сила первой линзы:

$$D=\frac{1}{F}=\frac{10}{9}\ Дптр$$ **(3 балла)**

Многопрофильная инженерная олимпиада «Звезда»
ЕСТЕСТВЕННЫЕ НАУКИ
2016

29 марта 2016 года

ПРОТОКОЛ № 1
заседания жюри

ПРИСУТСТВОВАЛИ: Келлер А.В., Заляпин В.И., Замышляева А.А., Воронцов А.Г., Куц Д.А., Гусев А.В.

СЛУШАЛИ: о распределении баллов победителей и призеров олимпиады

ПОСТАНОВИЛИ:

11 класс
– считать победителями олимпиады и наградить дипломами 1 степени участников, набравших 100 – 90 баллов;
– считать призерами олимпиады и наградить дипломами 2 степени участников, набравших 89 – 70 баллов;
– считать призерами олимпиады и наградить дипломами 3 степени участников, набравших 69 – 45 баллов.

10 класс
– считать победителями олимпиады и наградить дипломами 1 степени участников, набравших 100 – 95 баллов;
– считать призерами олимпиады и наградить дипломами 2 степени участников, набравших 94 – 70 баллов;
– считать призерами олимпиады и наградить дипломами 3 степени участников, набравших 69 – 40 баллов.

9 класс
– считать победителями олимпиады и наградить дипломами 1 степени участников, набравших 100 – 90 баллов;
– считать призерами олимпиады и наградить дипломами 2 степени участников, набравших 89 – 70 баллов;
– считать призерами олимпиады и наградить дипломами 3 степени участников, набравших 69 – 40 баллов.

8 класс
– считать победителями олимпиады и наградить дипломами 1 степени участников, набравших 100 – 75 баллов;
– считать призерами олимпиады и наградить дипломами 2 степени участников, набравших 74 – 65 баллов;
– считать призерами олимпиады и наградить дипломами 3 степени участников, набравших 64 – 40 баллов.

7 класс
− считать победителями олимпиады и наградить дипломами 1 степени участников, набравших 100 − 90 баллов;
− считать призерами олимпиады и наградить дипломами 2 степени участников, набравших 89 – 70 баллов;
− считать призерами олимпиады и наградить дипломами 3 степени участников, набравших 69 – 40 баллов.

6 класс
− считать победителями олимпиады и наградить дипломами 1 степени участников, набравших 100 − 90 баллов;
− считать призерами олимпиады и наградить дипломами 2 степени участников, набравших 89 – 80 баллов;
− считать призерами олимпиады и наградить дипломами 3 степени участников, набравших 79 – 40 баллов.

Председатели жюри:

____________________________ Келлер А.В.

____________________________ Воронцов А.Г.