

Министерство образования и науки Российской Федерации  
ФГАОУ ВО «Балтийский федеральный университет им. Иммануила Канта»  
Олимпиада школьников «Будущее с нами» 2015-2016 уч.г.  
Задания заключительного (очного) этапа  
Математика  
7 класс

**Задачи очного тура**

Общее время выполнения работы – 3 астрономических часа (180мин). Количество задач – 5.

**Общие критерии оценки:** 20 баллов ставится за полностью решенную задачу. 18-20 баллов ставится, если решение верное, но имеются небольшие недочеты. 14-18 баллов ставится, если решение в целом верное, но имеются существенные ошибки, не влияющие на логику рассуждений. 10-13 баллов ставится, если верно рассмотрен один из двух (более сложный) случай, или в задаче типа «оценка+пример» верно получена оценка. 5-9 баллов ставится, если получены вспомогательные утверждения, помогающие при решении задачи. 1-4 балла ставится, если рассмотрены отдельные случаи при отсутствии решения. 0 баллов, ставится, если нет продвижений в решении, даже если при этом дан верный ответ. Решение школьника не обязано совпадать с предложенными, тогда оно оценивается также в соответствии указанной выше схемой оценок.

**Задание 1. (20 баллов)**

В классе 26 учеников. Они сидят по двое за 13 партами так, что ровно половина всех девочек сидят с мальчиками.

Докажите, что учеников класса не удастся пересадить так, чтобы ровно половина всех мальчиков сидели с девочками.

**Решение**

Так как половина всех девочек сидит с мальчиками, то число девочек четно, а значит и число мальчиков четно. Далее, вторая половина девочек, которые не сидят с мальчиками, сидят друг с другом. Это значит, что они разбиты на пары, т. е. половина девочек тоже четное число. Следовательно, общее число девочек кратно 4. Но так как число 26 не кратно 4, то число мальчиков четно, но не кратно 4, а это значит, что если половина мальчиков будет сидеть с девочками, то вторую половину нельзя разбить на пары, чтобы они сидели друг с другом.

*Примечание.*

*Доказано, что число мальчиков четно – 6 баллов. Доказано, что число девочек кратно четырем – 12 баллов.*

**Задание 2. (20 баллов)**

Лист бумаги разрезали на 7 частей, некоторые из этих частей разрезали на 7 частей, и т. д. Может ли за некоторое число разрезов получиться 2016 листков бумаги?

**Решение**

Замечаем, что при каждом разрезании из одного листка получаем семь, т. е. число листков увеличивается на 6. Следовательно, из исходного листа может получиться число листков вида  $1 + 6n$ , где  $n \in \mathbb{N}$ , т. е. это число при делении на 6 дает остаток 1. Но  $2016 = 6 \cdot 336 + 0$ . Следовательно, 2016 листков получить не может.

**Задание 3. (20 баллов)**

Можно ли расставить скобки в выражении  $1 - 2 - 3 - 4 - 5 - 6 - 7 - 8 = 0$  так, чтобы получилось верное равенство?

**Решение**

Например, так:  $1 - (2 - 3) - 4 - (5 - 6) - (7 - 8) = 0$ .

**Задание 4. (20 баллов)**

На листе бумаги написано 5 чисел.

Сложив их попарно, получили числа: 0, 2, 4, 4, 6, 8, 10, 12, 14 и 16. Какие это числа?

**Решение**

Если бы среди данных чисел были равные, то получилось бы не меньше трех пар равных сумм, следовательно, все числа разные. Расположим числа в порядке возрастания  $a, b, c, x, y$ , тогда самая маленькая сумма  $a + b = 0$ , следующая  $a + c = 2$ ; самая большая  $x + y = 16$ , а предыдущая  $c + y = 14$ . Складывая все данные числа, получим  $76 = 4(a + b + c + x + y)$ , откуда  $(a + b) + c + (x + y) = 19$ . Из последнего равенства получаем, что  $c = 3$ , а затем последовательно получаем остальные числа:  $a = -1, b = 1, y = 11, x = 5$ .

**Ответ:** -1, 1, 3, 5, 11.

**Задание 5. (20 баллов)**

В выражении  $\frac{1}{2} * \frac{2}{3} * \dots * \frac{99}{100}$  замените все 98 звездочек знаками арифметических действий

( $-$ ,  $+$ ,  $\times$ ,  $:$ ) таким образом, чтобы значение полученного арифметического выражения равнялось нулю.

**Решение**

Например,  $\frac{1}{2} \times \frac{2}{3} \times \dots \times \frac{9}{10} - \frac{10}{11} \times \frac{11}{12} \times \dots \times \frac{99}{100} = \frac{1}{10} - \frac{1}{10} = 0$ ;

$\frac{1}{2} + \frac{2}{3} \times \frac{3}{4} \times \dots \times \frac{9}{10} - \frac{10}{11} \times \frac{11}{12} \times \dots - \frac{49}{50} - \frac{50}{51} \times \frac{51}{52} \times \dots \times \frac{99}{100} = \frac{1}{2} + \frac{1}{5} - \frac{1}{5} - \frac{1}{2} = 0$ .

Возможно, есть и другие верные ответы.