Министерство образования и науки Российской Федерации
ФГАОУ ВО «Балтийский федеральный университет им. Иммануила Канта»
Олимпиада школьников «Будущее с нами» 2015-2016 уч.г.
Задания заключительного (очного) этапа
Математика
11 класс

Задание 1. (20 баллов)
Известно, что:
$a+b+c<0;$
$ab+ac+bc>0;$
$abc<0$
Докажите, что $a<0, \quad b<0, \quad c<0$.
Решение
Допустим, что среди чисел a, b, c есть положительные. Поскольку abc < 0, то положительных чисел ровно два. Пусть, например, a>0, b>0, c<0 (другие случаи рассматриваются аналогично). Из второго неравенства получаем ac + b(a+c) > 0. Но ac < 0 и b(a+c) < 0, поскольку из первого неравенства a + c < -b < 0. Следовательно, ac + b(a + c) < 0. Получили противоречие.
Примечание. Рассмотрен как и в данном решении один случай – 20 баллов.

Задание 2. (20 баллов)
Существует ли такое *x*, что значения выражений $x+\sqrt{3}$ и $x^3+\sqrt{3}$ – рациональные числа?
Решение
Пусть такое x найдется, тогда
$x+\sqrt{3}=a$ и $x^3+\sqrt{3}=b$
где a и b рациональные числа, тогда получаем последовательно
$$(a-\sqrt{3})^3+\sqrt{3}=b$$
$$a^3-3a^2\sqrt{3}+9a-3\sqrt{3}+\sqrt{3}=b$$
$$a^3+9a-b=3a^2\sqrt{3}+2\sqrt{3}$$
$$\sqrt{3}=\frac{a^3+9a-b}{3a^2+2}$$
Но это равенство невозможно, так как справа рациональное число, а слева нерациональное
Ответ: не существует

Задание 3. (20 баллов)
Какое наибольшее значение может принимать сумма косинусов всех углов равнобедренного треугольника?
Ответ: 3/2
Решение
Пусть углы при основании треугольника равны α, тогда угол при вершине равен $180^0-2\alpha$.
Найдем сумму косинусов этих углов:
$2\cos\alpha+\cos(180^0-2\alpha)=2\cos\alpha-\cos 2\alpha=2\cos\alpha-2cos^2\alpha+1$.
Выполнив замену $\cos\alpha=t$, получим квадратичную функцию $y=-2t^2+2t+1$, которая достигает своего наибольшего значения при $t=1/2$.
Заметим, что $\cos\alpha$ принимает значение $1/2$ при $\alpha=60^0$.

Таким образом, максимальное значение суммы косинусов углов достигается в равностороннем треугольнике и равно $3/2$.

Примечание. Верный ответ без обоснования – 3 балла.

Задание 4. (20 баллов)

На координатной плоскости задана фигура Ф, состоящая из всех точек (a; b) координаты которых таковы, что система неравенств:

$$\begin{cases} x^2+(a+b-32)x-32(a+b)>0 \\ x^2+(4-a^2-b^2)x-4(a^2+b^2)<0 \end{cases}$$

не имеет решений.

Найти площадь фигуры Ф.

Решение

Задание 5. (20 баллов)

Дана последовательность $\{a_n\}$, которая определяется правилами:

$a_0 = 9$,

$a_k = 4a_{k-1}^3 + 3a_{k-1}^4, \quad k > 0$.

Докажите, что в десятичной записи числа a_{11} содержится не менее 2016 девяток.

Решение

(Подсказка: рассмотрите последовательность $b_n = a_n + 1$ и покажите, что b_n делится на большую степень десятки.)

Рассмотрим последовательность $\{b_n\}$, определенную формулой $b_n = a_n + 1$. Условие $a_k = 3a_{k-1}^4 + 4a_{k-1}^3$ перепишем в виде $b_k = 3(b_{k-1}-1)^4 + 4(a_{k-1}-1)^3 + 1 = 3b_{k-1}^4 - 8b_{k-1}^3 + 6b_{k-1}^2$. Из полученной формулы видно, что если десятичная запись числа b_{k-1} оканчивается на K нулей, то запись числа b_k оканчивается на $2K$ нулей. Так как $b_0 = 10$, то есть оканчивается на один ноль, то b_k оканчивается на 2^k нулей. В частности, b_{11} оканчивается на 2048 нулей, следовательно, $a_{11} = b_{11} - 1$ оканчивается на 2048 девяток.