Министерство образования и науки Российской Федерации
ФГАОУ ВПО «Балтийский федеральный университет им. Иммануила Канта»
Олимпиада школьников «Будущее с нами» 2014/2015гг
Очный этап
Математика
8 класс

Общее время выполнения работы – 2 астрономических часа (120 мин).
Количество задач – 4.

Общие критерии оценки:
7 баллов ставится за полностью решенную задачу.
6-7 баллов ставится, если решение верное, но имеются небольшие недочеты.
5-6 баллов ставится, если решение в целом верное, но имеются существенные ошибки, не влияющие на логику рассуждений.
4 балла ставится, если верно рассмотрен один из двух (более сложный) случай, или в задаче типа «оценка+пример» верно получена оценка.
2-3 балла ставится, если получены вспомогательные утверждения, помогающие при решении задачи.
1 балл ставится, если рассмотрены отдельные случаи при отсутствии решения.
0 баллов, ставится, если нет продвижений в решении, даже если при этом дан верный ответ.
Решение школьника не обязано совпадать с предложенными, тогда оно оценивается также в соответствии указанной выше схемой оценок.

Задание 1. (7 баллов.)
Петя решил систему уравнений

$$10x + y = 6,$$
$$99x + a\,y = 59,$$

где в качестве значения коэффициента a взял число 10, полученное путем измерений. Однако оказалось, что истинное значение коэффициента a отличается от 10 на величину, меньшую чем 0,1. Могло ли при этом оказаться так, что:
а) $x > 100000$;
б) $y > 1$;
в) $y > -2x$?

Решение

Выразим неизвестные x и y данной системы: $x = \dfrac{6a-59}{10a-99}$, $y = \dfrac{-4}{10a-99}$.

Откуда видно, что при любом значении коэффициента a из указанного диапазона имеем: $x > 0$, $y < 0$, $|y| > 2|x|$, причем для любого наперед заданного положительного x всегда можно подобрать соответствующее значение a.

Ответ: а) могло; б) не могло; в) не могло.

Задание 2. (7 баллов.)
1. Пусть a, b и c - длины сторон произвольного треугольника.
2. Докажите, что:

$$a(b-c)^2 + b(c-a)^2 + c(a-b)^2 + 4abc > a^3 + b^3 + c^3.$$

Решение

$$a(b-c)^2 + b(c-a)^2 + c(a-b)^2 + 4abc - a^3 - b^3 - c^3 =$$
$$= -a^3 + a^2(b + c) + a(b-c)^2 - (b + c)(b-c)^2 =$$
$$= (b + c - a)(a + b - c)(a - b + c) > 0$$ в силу неравенства треугольника.

Задание 3. (7 баллов.)

3. На гипотенузе *BC* равнобедренного прямоугольного треугольника *ABC* отмечены две точки *E* и *D* так, что *BE* = *BA* и *CD* = *CA*.

4. Найти $\angle DAE$.

5. **Ответ:** 45^0

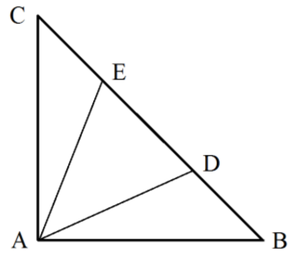
6. Решение

7. Из равнобедренного треугольника BAE получаем, что $\angle$BEA = 135^0

8. И аналогично $\angle$CDA = 135^0

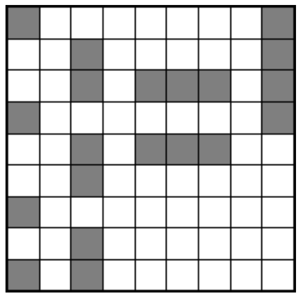
9. Отсюда $\angle$EAD = 45^0

10.



Задание 4. (7 баллов.)

Легко разместить комплект кораблей для игры в "Морской бой" на доске 9×9 (см. рис. справа). А на какой наименьшей квадратной доске можно разместить этот комплект? (Напомним, что согласно правилам корабли не должны соприкасаться даже углами, при этом кораблей размерами 1×4 – один, 1×3 – два, 1×2 – три и 1×1 – четыре.)

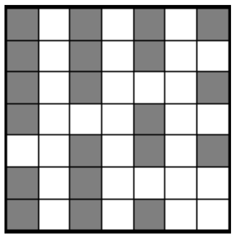


Ответ

7×7

Решение

11. Пример расстановки кораблей на доске 7×7 изображен на рис. Остается доказать, что на доске 6×6 корабли расставить нельзя.



Доказательство 1.

Будем считать не клетки, а узлы доски, занимаемые кораблями. Корабль 1×4 занимает 2·5=10 узлов, корабль 1×3 занимает 8 узлов, корабль 1×2 – 6 узлов, корабль 1×1 – 4 узла; причем по правилам расстановки один узел не может принадлежать более чем одному кораблю. Значит, все корабли занимают 10+2·8+3·6+4·4=60 узлов, и выставить их все на доску с меньшим числом узлов невозможно. Но всего на доске 6×6 имеется лишь$(6+1)^2=49<60$ узлов.

Доказательство 2.

Ту же идею можно оформить иначе. А именно, заключим каждый корабль в прямоугольник, увеличив его на полклетки в каждую сторону. Такие прямоугольники не могут пересекаться и занимают всего 10+2·8+3·6+4·4=60 клеток. А если бы все корабли можно было разместить на доске 6×6, то все соответствующие прямоугольники располагались бы на доске 7×7, на которой имеется лишь 49<60 клеток. (Отметим, что каждая клетка этой новой доски содержит ровно один узел старой – поэтому вычисление и получается точно таким же, как в первом доказательстве.)

Доказательство 3.

Разрежем доску 6×6 на 9 квадратов 2×2. Каждый такой квадрат при расстановке по правилам может содержать клетки только одного корабля. Но всего кораблей 10, поэтому их на такой доске разместить нельзя. (Отметим, что это рассуждение доказывает, что на доску 6×6 все 10 кораблей нельзя было бы поставить, даже если все они имели бы размеры 1×1.)