Министерство образования и науки Российской Федерации
ФГАОУ ВПО «Балтийский федеральный университет им. Иммануила Канта»
Олимпиада школьников «Будущее с нами» 2014/2015гг
Очный этап
Математика
7 класс

Общее время выполнения работы – 2 астрономических часа (120 мин).
Количество задач – 4.

Общие критерии оценки:
7 баллов ставится за полностью решенную задачу.
6-7 баллов ставится, если решение верное, но имеются небольшие недочеты.
5-6 баллов ставится, если решение в целом верное, но имеются существенные ошибки, не влияющие на логику рассуждений.
4 балла ставится, если верно рассмотрен один из двух (более сложный) случай, или в задаче типа «оценка+пример» верно получена оценка.
2-3 балла ставится, если получены вспомогательные утверждения, помогающие при решении задачи.
1 балл ставится, если рассмотрены отдельные случаи при отсутствии решения.
0 баллов, ставится, если нет продвижений в решении, даже если при этом дан верный ответ.
Решение школьника не обязано совпадать с предложенными, тогда оно оценивается также в соответствии указанной выше схемой оценок.

Задание 1. (7 баллов.)
Для прохода в учреждение необходимо предъявить пятизначную комбинацию, состоящую из нулей и единиц. Пятизначная комбинация x, y, z, u, v поступает в вычислительное устройство, где ее компоненты умножаются на фиксированные целые числа a, b, c, d, e, и вычисляется сумма

$$S = ax+by+cz+du+ev.$$

Проход в учреждение открывается, только если эта сумма окажется не меньше некоторого фиксированного целого числа, нам неизвестного. Однако известно, что проход открывается при предъявлении комбинаций:

1,0,1,1,0,   1,1,0,1,0,   1,1,1,1,1,

а при наборе следующих комбинаций проход закрыт:

1,0,1,0,0,   0,0,1,1,0,   1,1,0,1,1,   1,0,1,1,1.

Найдите еще одну комбинацию, открывающую проход в учреждение.
Решение:
Для комбинации 1,0,1,1,0 – проход открыт, а для 0,0,1,1,0 – проход закрыт. То есть при изменении значения первой координаты с 1 на 0 значение суммы становится меньше , поэтому a>0. Аналогично можно показать, что b>0, c>0, d>0, e<0.
Поэтому заведомо пройдет комбинация, максимизирующая значение суммы , а именно 1,1,1,1,0.
Ответ: 1,1,1,1,0.

Задание 2. (7 баллов.)
Найдите последнюю цифру числа $1^2 + 2^2 + ... + 999^2$.
Решение
Добавим слагаемое 0^2. Разбиваем слагаемые на группы по 10 штук. Таких групп будет 100 и суммы чисел в них заканчиваются на одну и ту же цифру. Поэтому последняя цифра исходной суммы равна 0.

Ответ: 0

Задание 3. (7 баллов.)

Пусть n – натуральное число, большее единицы. Заданы n натуральных чисел $a_1, a_2, \ldots, a_n$, каждое из которых меньше n. Число n будем называть весом набора ($a_1, a_2, \ldots, a_n$). Задачей закрашивания для набора ($a_1, a_2, \ldots, a_n$) будем называть расстановку черных клеток в таблице размера n x n клеток таким образом, чтобы:

в первой строке и в первом столбце таблицы содержались a_1 черных клеток;

во второй строке и во втором столбце таблицы содержались a_2 черных клеток;

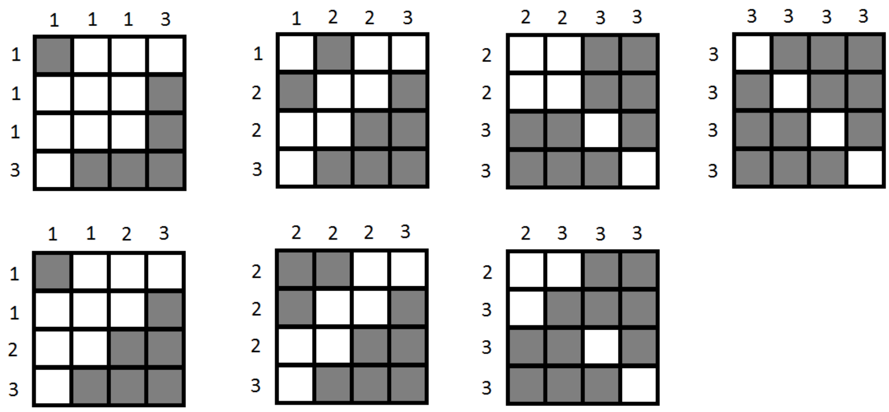
и т. д.,

в n-й строке и в n-м столбце таблицы содержались a_n черных клеток.

Найдите набор ($a_1, a_2, \ldots, a_n$) наименьшего веса, для которого задача закрашивания не имеет решений.

Решение

Заметим, что разрешимость (неразрешимость) задачи не изменяется при любой перестановке чисел в наборе. При этом очевидно, что для набора, содержащего лишь единицы и двойки, задача закрашивания всегда разрешима. Ограничимся рассмотрением неубывающих наборов, у которых последнее число больше двух. Очевидно, что все наборы веса 2 и 3 разрешимы. Перебором убеждаемся, что все наборы веса n = 4 также разрешимы:



При n=5 имеется неразрешимый набор (1, 1, 1, 4, 4). В самом деле, с одной стороны, в прямоугольнике из первых трех строк таблицы должны содержаться три закрашенные клетки. С другой стороны, в каждом из двух последних столбцов в этот прямоугольник должны попасть не менее двух клеток – т.е. в том же прямоугольнике должны содержаться не менее четырех закрашенных клеток. Полученное противоречие показывает неразрешимость данного набора.

Ответ: (1, 1, 1, 4, 4).

Задание 4. (7 баллов.)

Существует ли четырехугольник, который можно двумя прямыми разрезать на 6 кусков?

Ответ: да, существует, см. рисунок