Министерство образования и науки Российской Федерации
ФГАОУ ВПО «Балтийский федеральный университет им. Иммануила Канта»
Олимпиада школьников «Будущее с нами» 2014/2015гг
Очный этап
Математика
10 класс

Общее время выполнения работы – 3 астрономических часа (180 мин).
Количество задач – 5.

Общие критерии оценки:
7 баллов ставится за полностью решенную задачу.
6-7 баллов ставится, если решение верное, но имеются небольшие недочеты.
5-6 баллов ставится, если решение в целом верное, но имеются существенные ошибки, не влияющие на логику рассуждений.
4 балла ставится, если верно рассмотрен один из двух (более сложный) случай, или в задаче типа «оценка+пример» верно получена оценка.
2-3 балла ставится, если получены вспомогательные утверждения, помогающие при решении задачи.
1 балл ставится, если рассмотрены отдельные случаи при отсутствии решения.
0 баллов, ставится, если нет продвижений в решении, даже если при этом дан верный ответ.
Решение школьника не обязано совпадать с предложенными, тогда оно оценивается также в соответствии указанной выше схемой оценок.

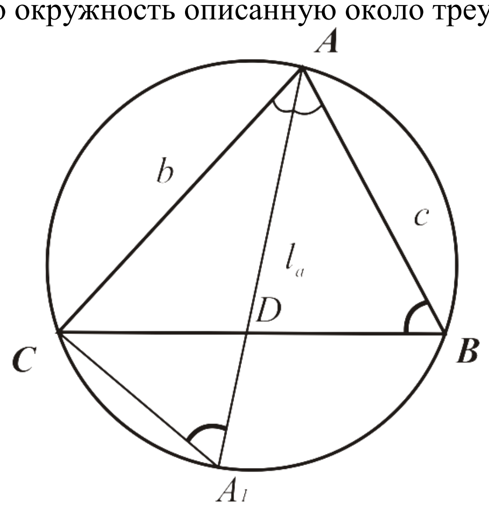
Задание 1. (7 баллов.)
В каждую клетку квадратной таблицы размером 25×25 вписано произвольно одно из чисел: +1 и -1.
Под каждым из столбцов записывается произведение всех чисел данного столбца, а справа от каждой строки – произведение всех чисел данной строки.
Может ли сумма всех 50 произведений быть равной нулю?
Решение
Перемножая все 50 произведений получим 1, так как в каждое из произведений любое из чисел войдет дважды. Тогда в произведении 50 множителей количество чисел, равных -1 чётно. Значит среди 50 чисел – четное количество произведений, каждое из которых равно 1 и четное количество произведений, каждое из которых равно -1. Очевидно, что 50 нельзя представить в виде суммы двух равных четных чисел, а значит полученная сумма не может быть равна нулю.

Задание 2. (7 баллов.)
В треугольнике ABC $AD = l_a$ - биссектриса угла А, $CA = b, AB = c$.
Докажите, что:

$$l_a < \sqrt{bc}$$

Решение

Рассмотрим вспомогательную окружность описанную около треугольника *ABC*.



Продолжим биссектрису *AD* до пересечения с окружностью в точке A_1 получим треугольник ACA_1, подобный *ADB* (по двум углам). Из подобия треугольников следует, что

$$\frac{b}{l_a} = \frac{l_a + DA_1}{c}.$$

Из последнего равенства получаем

$$bc = (l_a)^2 + l_a \cdot DA_1 > (l_a)^2 \Rightarrow l_a < \sqrt{bc}$$

Задание 3. (7 баллов.)

Найти сумму:

$$\frac{2}{1\cdot 2\cdot 3} + \frac{2}{2\cdot 3\cdot 4} + \frac{2}{3\cdot 4\cdot 5} + \ldots + \frac{2}{2013\cdot 2014\cdot 2015}$$

Решение

Легко проверить, что

$$\frac{2}{n\cdot(n+1)\cdot(n+2)} = \frac{1}{n} - \frac{2}{n+1} + \frac{1}{n+2}$$

Отсюда, искомая сумма равна

$$\frac{2}{1\cdot 2\cdot 3} + \frac{2}{2\cdot 3\cdot 4} + \frac{2}{3\cdot 4\cdot 5} + \ldots + \frac{2}{2013\cdot 2014\cdot 2015} =$$

$$= \frac{1}{1} - \frac{2}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{2} - \frac{2}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{3} - \frac{2}{4} + \frac{1}{5} + \ldots \frac{1}{2013} - \frac{2}{2014} + \frac{1}{2015} =$$

$$= \frac{1}{1} - \frac{1}{2} - \frac{1}{2014} + \frac{1}{2015} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2014\cdot 2015} = \frac{1014552}{2029105}$$

Задание 4. (7 баллов.)
Доказать, что при $x \geq 0$ верно неравенство:

$$1 + x^{n+1} \geq \frac{(2x)^n}{(1+x)^{n-1}}$$

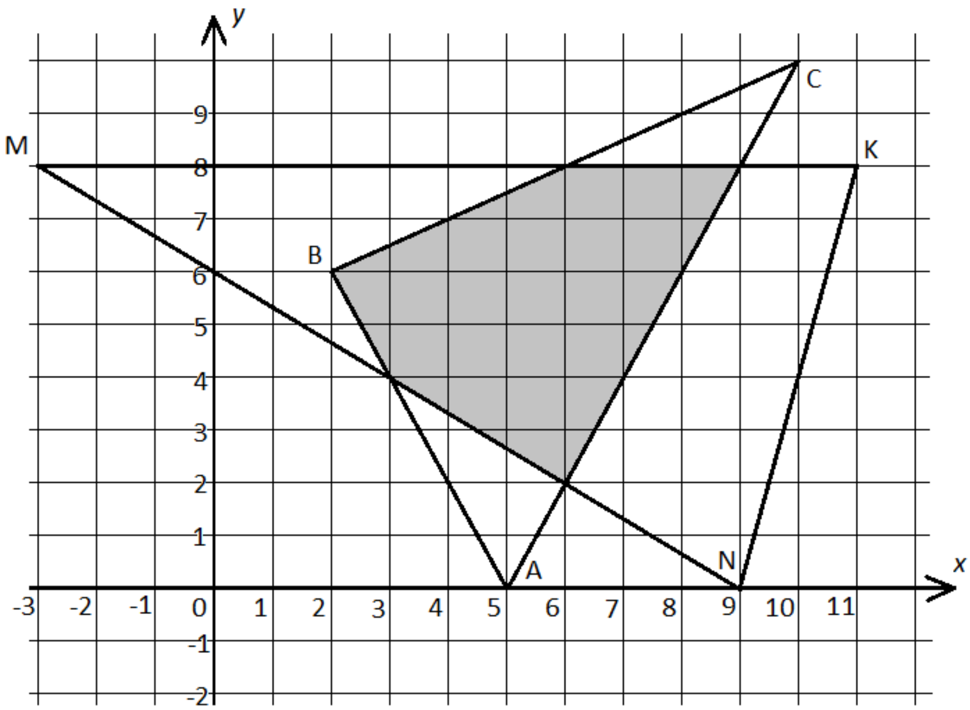
где n – натуральное число.
Решение
Перепишем неравенство так:

$$(1 + x^{n+1})(1+x)^{n-1} \geq (2x)^n$$

К множителям в левой части применим неравенство Коши:

$$(1 + x^{n+1})(1+x)^{n-1} \geq 2\sqrt{1 \cdot x^{n+1}}\,(2\sqrt{x})^{n-1} = (2x)^n$$

Задание 5. (7 баллов.)
Найдите площадь фигуры, образованной пересечением треугольников ABC и KMN, если их вершины имеют координаты:
A(5; 0), B(2; 6), C(10; 10), К(11; 8), M(-3; 8), N(9; 0)
Решение



Искомая фигура есть пятиугольник с координатами вершин B(2; 6), P(6; 8), Q(9; 8), R(6; 2), S(3; 4). Его площадь равна 23 (например, по формуле Пика).
Ответ: 23