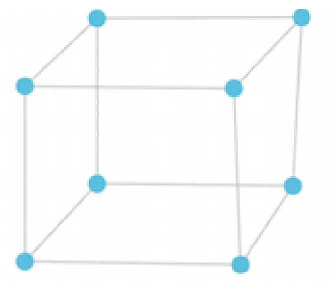
Задачи и решения заочного тура
Олимпиады ДМиТИ-2017-2018

Задача 1. (1 балл).
Перед вами куб. Раскрасьте его вершины так, чтобы выполнялись следующие условия:
1) у каждой синей вершины одинаковое количество синих соседей;
2) у каждой красной вершины тоже одинаковое количество синих соседей;
3) присутствовали бы вершины обоих цветов.

Раскраски, удовлетворяющие условиям 1 и 2 называются совершенными.



Задача 2. (6 баллов).
Раскраски данного куба в 2 цвета, удовлетворяющие следующим условиям, называются совершенными.
1) у каждой синей вершины было одинаковое количество синих соседей;
2) у каждой красной вершины тоже было бы одинаковое количество синих соседей;

Найдите количество совершенных раскрасок куба.

Задача 3. (5 баллов).

Из элементов AND (И), OR (ИЛИ) и XOR (ИСКЛЮЧАЮЩЕЕ ИЛИ) требуется построить логическую схему для сложения двоичных чисел. На вход подаются два трёхзначных двоичных числа. Первые три входа соответствуют первому слагаемому: верхний вход — первая цифра, нижний из трёх — последняя. Аналогично три нижних входа соответствуют второму слагаемому.

Выходы должны образовывать их сумму в двоичной системе счисления: верхний выход — первая цифра, нижний выход — последняя.

Например, когда мы получаем на вход 011101, это значит, что мы складываем 011 и 101. Получается 1000. Значит, верхний выход должен быть единицей, а остальные нулями.

Задача 4. (3 балла).
Опишите множество слов из букв **a** и **b**, которые можно разбить на чередующиеся блоки из букв **a** и букв **b** нечётной длины, например, **abbbaaaaab**.

Для описания используйте формулы, которые называются регулярными выражениями.

Так для повторения блока из нескольких букв используйте операцию «звездочка» (итерация), например, **(abb)*** задает множество слов **{пустое слово, abb, abbabb, abbabbabb, …}**.

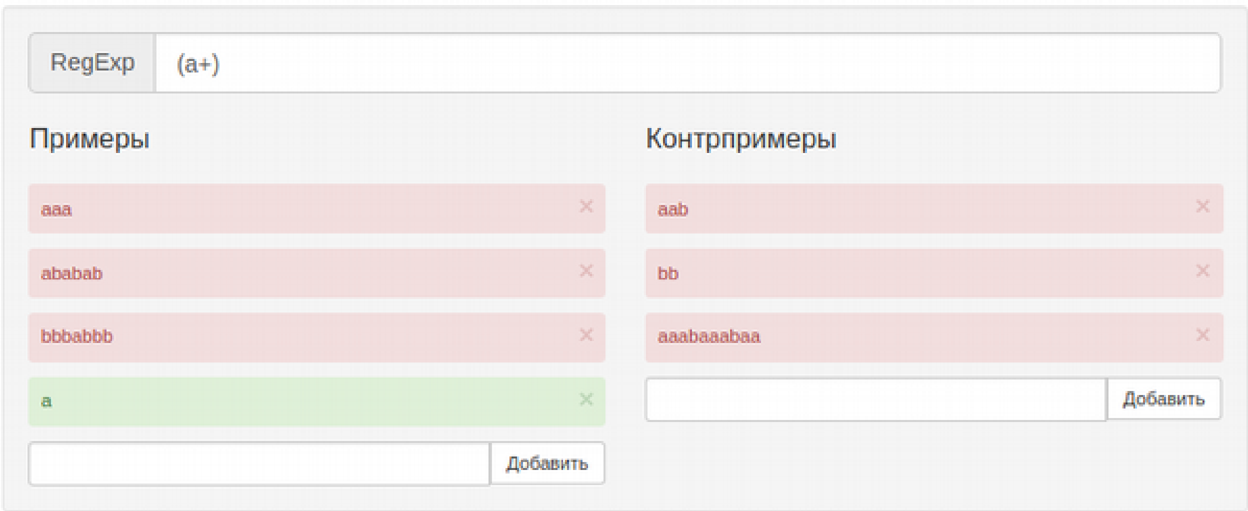
Умножение множеств (эту операцию, как обычно в алгебре, изображают точкой или вообще опускают, что мы и будем делать), описывает склейку всех слов первого множества со словами второго (третьего и т.д.), например **a*cb*** обозначает множество слов: **{c, ac, cb, acb, aac,..., aaa...acb...b, ...}**. Обратите внимание что слова, в которых нет букв **a** или **b**, получаются за счет того, что результат итерации может не содержать символов, то есть быть пустым словом.

Последней операцией, которая используется в формулах, является сложение. Сложение соответствует объединению множеств. Так обозначение **(a+b)*c+d(ac*+)** описывает множество всех последовательностей из букв **a** и **b** (обозначается **(a+b)***), к концу которых присоединена буква **c**, объединенного с множеством слов, начинающихся с буквы **d**, за которой следует буква **a**, а за ней любое число букв **c** и ещё одним однобуквенным словом (**d** умножить на пустое слово — это **d**).

Слева приведены примеры слов, которые удовлетворяют нашему условию, справа примеры слов, которые не удовлетворяют ему. Благодаря подсветке вы можете видеть, какие из этих примеров и контрпримеров удовлетворяют построенному вами выражению, а какие — нет.

Пустое слово считать разбивающимся на 0 блоков, т.е. подходящим под условие.

В качестве начального решения вы можете видеть выражение, которому удовлетворяет слово **a** и пустое слово.



Задача 5. (4 балла).

В задаче номер 4 мы описывали все слова в алфавите **{a, b}**, разбивающиеся на чередующиеся блоки из букв **a** и букв **b** нечётной длины.

Найдите количество таких слов длины 8.

Задача 6. (3 балла).

Постройте схему, распознающую все слова в алфавите **{a, b}**, разбивающиеся на чередующиеся блоки из букв **a** и букв **b** нечётной длины.

Данная схема состоит из вершин (называемых состояниями) и стрелок, символизирующих правила, по которым работает эта схема. Схема начинает работу в начальном состоянии **S0**, выделенном оранжевым. Поступающее на ход слово анализируется посимвольно. При рассмотрении каждого символа мы переходим из текущего состояния по стрелочке, над которой написан этот символ.

После того, как всё слово проанализировано, мы заканчиваем работу в одном из состояний. Некоторые состояния необходимо пометить как конечные (жирная каёмка). Это те состояния, в которых мы оказываемся, проанализировав нужные слова.

Пустое слово считать разбивающимся на 0 блоков, т.е. подходящим под условие.

Задача 7. (3 балла).

Постройте машину Тьюринга, которая умножает записанное на ленте число в четверичной системе на 3.

Список команд

```
s[0]> s[0]R
s[1]> s[1]R
s[2]> s[2]R
s[3]> s[3]R
s[*]>q0[*]L
q0[0]>q0[0]L
q0[1]>q0[3]L
q0[2]>q1[2]L
q0[3]>q2[1]L
q1[3]>q2[2]L
q1[2]>q1[3]L
q1[1]>q1[0]L
q1[0]>q0[1]L
q2[0]>q0[2]L
q2[1]>q1[1]L
q2[2]>q2[0]L
q2[3]>q2[3]L
q0[*]> f[*]R
q1[*]> f[1]N
q2[*]> f[2]N
```

Задача 8. (4 балла).

Постройте схему, выполняющую умножение вводимого числа в четверичной системе на 3.

Данная схема состоит из вершин (называемых состояниями) и стрелок, символизирующих правила, по которым работает эта схема. Схема начинает работу в начальном состоянии **S0**, выделенном оранжевым. Поступающее на ход число анализируется посимвольно. При рассмотрении каждого символа мы переходим из текущего состояния по стрелочке, над которой написан этот символ.

В данной задаче мы записываем число от последней цифры к первой. Если количество цифр в произведении больше количества цифр в множителе, для правильной работы автомата к множителю спереди нужно добавить 0 (т.е. добавить 0 в конце вводимой строки).

Например, для строки 123 автомат выдаст строку 322, а для строки 1230 (соответствующей тому же самому четверичному числу 321) выдаст результат 3222 (соответствующий числу 2223).

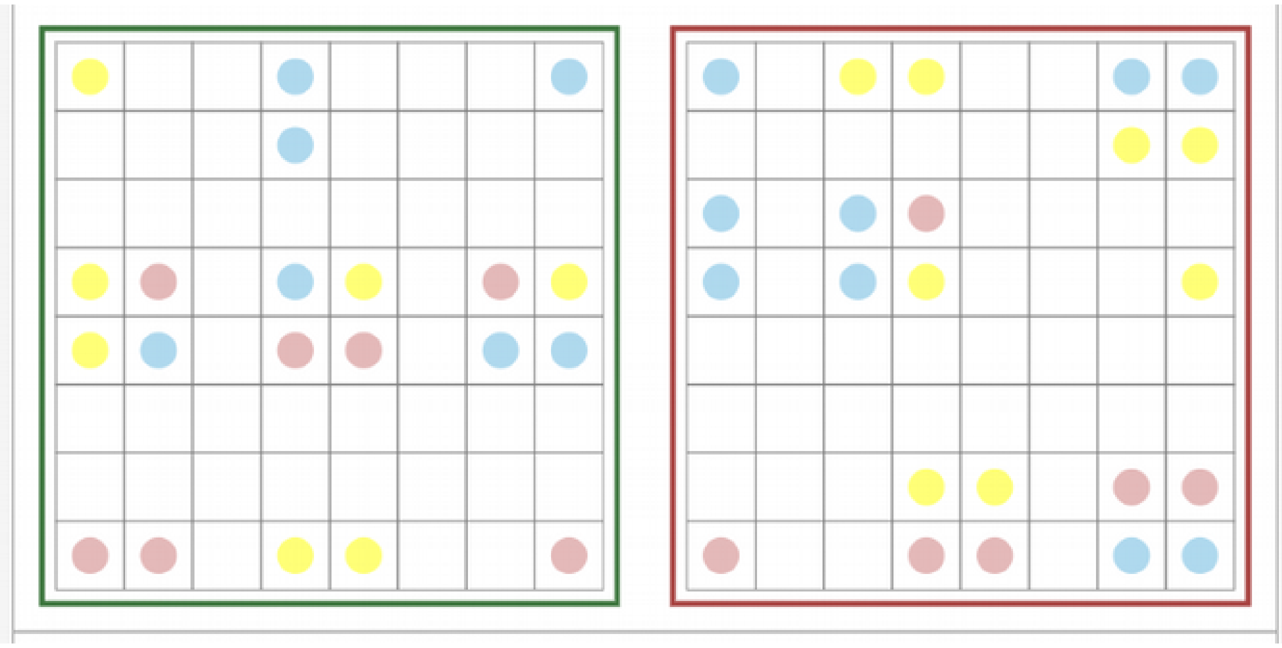
Задача 9. (4 балла).

Напишите логическую формулу, описывающую свойство, которым обладает комбинация фишек на левой картинке, но не обладает комбинация на правой. Постарайтесь, чтобы описание было как можно короче.

В формуле используются следующие обозначения:

Фишки обозначаются переменными *x*, *y*, *z*. Простые свойства описываются такими выражениями как «*x* синий», «*y* красный», «z желтый», «*x* сосед *y*» (последнее означает, что фишки стоят на различных клетках, у которых есть общая сторона или угол). Для записи более сложных свойств используются логические связки, которые соединяют простые свойства:

И, ИЛИ, НЕ ВЕРНО ЧТО, СЛЕДОВАТЕЛЬНО, ТОГДА И ТОЛЬКО ТОГДА, ДЛЯ ВСЕХ *x*, СУЩЕСТВУЕТ *x* ТАКОЙ, ЧТО (вместо *x* можно использовать *y* или *z*).
Для упорядочения связок используются круглые скобки. В качестве начального решения введена формула, которая не верна для обоих картинок.



Задача 10. (3 балла).
Операция умножения требует существенно больше элементарных операций чем операция сложения (или вычитания), поэтому для повышения эффективности алгоритмов применяют алгебраические приемы, которые за счет увеличения числа операций сложения и вычитания используют меньше операций умножения.

Выражение $a^3 + b^3 - c^3$ легко можно вычислить используя 6 операций умножения: для возведения каждого числа в куб требуется две операции. Придумайте алгоритм вычисления этой суммы за меньшее число операций умножения. Чем меньше операций, тем выше будет оценка за задачу.