

Задачи и решения очного тура Олимпиады ДмиТИ-2017-2018

1. Рыцари и лжецы. Логическая схема - 1.

За круглым столом сидят четыре человека. Каждый из них либо рыцарь, либо лжец. Рыцари всегда говорят только правду, а лжецы всегда лгут. Постройте логическую схему, которая принимает значение истина тогда и только тогда, когда каждый из сидящих за столом может произнести фразу «Оба моих соседа лжецы».

На логической схеме входы соответствуют людям: нули обозначают лжецов, а единицы рыцарей. Соседние входы соответствуют соседним людям, кроме того, поскольку стол круглый, верхний вход будем считать соседним с нижним.

Разрешается использовать логические элементы AND (и), OR (или), NOT (не) и XOR (исключающее или).

2. Рыцари и лжецы. Логическая схема - 2.

За круглым столом сидит $n > 2$ человек. Каждый из них либо рыцарь, либо лжец. Рыцари всегда говорят только правду, а лжецы всегда лгут. Опишите способ построения логической схемы с n входами, которая принимает значение истина тогда и только тогда, когда каждый из сидящих за столом может произнести фразу «Оба моих соседа лжецы».

На логической схеме входы соответствуют людям: нули обозначают лжецов, а единицы рыцарей. Соседние входы соответствуют соседним людям, кроме того, поскольку стол круглый, верхний вход будем считать соседним с нижним.

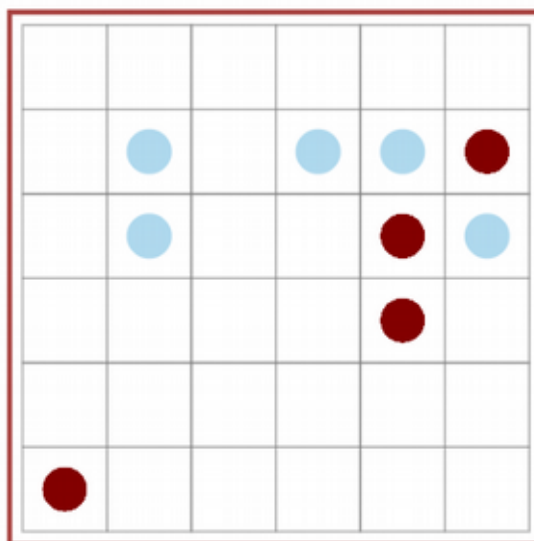
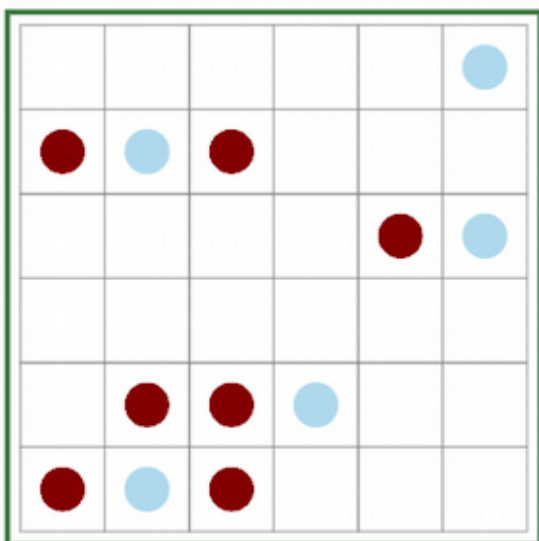
Разрешается использовать логические элементы AND (и), OR (или), NOT (не) и XOR (исключающее или).

3. Рыцари и лжецы. Составление логического выражения.

На некоторых клетках квадратной клетчатой доски стоят рыцари, которые говорят только правду, а на некоторых — лжецы, которые всегда лгут. Некоторые клетки могут быть свободны; на каждой клетке стоит не более одного человека. Рыцари обозначены светлыми (голубыми) кружками, лжецы — тёмными (красными).

Составьте логическое выражение, которое истинно тогда и только тогда, когда каждый из стоящих на доске человек может произнести фразу «Все мои соседи лжецы».

На левой картинке изображён пример, удовлетворяющий условию задачи, на правой — не удовлетворяющий.



4. Рыцари и лжецы. Описание последовательности.

Рыцари, которые говорят только правду, и лжецы, которые всегда лгут, выстроились в ряд. (В ряду хотя бы один человек). Каждый из них произнёс фразу «Все мои соседи лжецы». Обозначим рыцаря буквой **P**, а лжеца — буквой **L**. Тогда каждой последовательности рыцарей и лжецов, для которой выполняется условие задачи, соответствует некоторое слово.

Опишите это слово, используя формулу, которая называется регулярным выражением. Такое выражение строится с помощью описываемых ниже операций "итерация", "умножение", "сложение".

Так для повторения блока из нескольких букв используйте операцию «звездочка» (итерация), например, $(abb)^*$ задает множество слов {пустое слово, **abb**, **abbabb**, **abbabbabb**, ...}.

Умножение множеств (эту операцию, как обычно в алгебре, изображают точкой приписыванием второго операнда вслед за первым, что мы и будем делать), описывает склейку всех слов первого множества со словами второго (третьего и т.д.), например a^*cb^* обозначает множество слов: {**c**, **ac**, **cb**, **acb**, **aac**,..., **aaa...acb...b**, ...}. Обратите внимание что слова, в которых нет букв **a** или **b**, получаются за счет того, что результат итерации может не содержать символов, то есть быть пустым словом.

Последней операцией, которая используется в формулах, является сложение. Сложение соответствует объединению множеств. Так, обозначение $(a+b)^*c+d(ac^*+)$ описывает множество всех последовательностей из букв **a** и **b** (обозначается $(a+b)^*$), к концу которых присоединена буква **c**, объединенного с множеством слов, начинающихся с буквы **d**, за которой следует буква **a**, а за ней любое число букв **c** и ещё одним однобуквенным словом (**d** умножить на пустое слово — это **d**)."

5. Рыцари и лжецы. Распознающая схема.

Рыцари, которые говорят только правду, и лжецы, которые всегда лгут, выстроились в ряд. (В ряду хотя бы один человек).

Каждый из них произнёс фразу «Все мои соседи лжецы». Обозначим рыцаря буквой **P**, а лжеца — буквой **L**. Тогда каждой последовательности рыцарей и лжецов, для которой выполняется условие задачи, соответствует некоторое слово.

Постройте схему, которая будет распознавать слова в алфавите **{L,P}**, соответствующие описанным в задаче последовательностям рыцарей и лжецов.

Данная схема состоит из вершин (называемых состояниями) и стрелок. Каждая стрелка соединяет два состояния и символизирует переход схемы из первого состояния во второе..

Схема начинает работу в начальном состоянии **S0**. Поступающее на вход слово анализируется посимвольно. При анализе каждого символа схема переходит из текущего состояния по стрелке, над которой написан этот символ.

После того, как всё слово проанализировано, схема заканчивает работу в одном из состояний. Некоторые состояния необходимо пометить как конечные (жирная каёмка). Это те состояния, в которых схема оказывается, в случае, если поступившее на вход схемы слово соответствует условию.

6. Общественное мнение. Соседи. Машина Тьюринга.

Вдоль длинной улицы расположены дома, в каждом из которых живёт по одному человеку. Каждый из жителей улицы является сторонником одной из двух политических партий: **1** или **2**. Каждый день каждый человек общается со всеми своими соседями (с одним соседом, если человек живёт в на краю улицы и с обоими соседями в остальных случаях). За ночь он обдумывает полученную от них информацию, и если оказывается, что двое его соседей являются сторонниками противоположной политической партии, к утру человек меняет свои взгляды.

На ленте записана произвольная последовательность единиц и двоек, соответствующая политическим взглядам жителей улицы в какой-то из дней. Постройте машину Тьюринга, которая преобразует эту строку в строку, соответствующую политическим взглядам жителей улицы на следующий день.

Список команд

`s[1]>q1[1]R`

`s[2]>q2[2]R`

`q1[1]>q1[1]R`

`q1[2]>q3[2]R`

`q3[2]>q2[2]R`

`q3[1]>q5[1]L`

`q2[2]>q2[2]R`

`q2[1]>q4[1]R`

`q4[1]>q1[1]R`

`q4[2]>q5[2]L`

`q5[2]>q2[1]R`

`q5[1]>q1[2]R`

`q1[*]> f[*]N`

`q2[*]> f[*]N`

`q3[*]> f[*]N`

`q4[*]> f[*]N`

7. Общественное мнение. Соседи. Стабилизация.

7.1 Вдоль длинной улицы расположены дома, в каждом из которых живёт по одному человеку. Каждый из жителей улицы является сторонником одной из двух политических партий: **1** или **2**. Каждый день каждый человек общается со всеми своими соседями (с одним соседом, если человек живёт в на краю улицы и с обоими соседями в остальных случаях). За ночь он обдумывает полученную от них информацию, и если оказывается, что двое его соседей являются сторонниками противоположной политической партии, к утру человек меняет свои взгляды. Верно ли, что когда-нибудь политические взгляды жителей улицы стабилизируются?

7.2 Вокруг круглой площади расположены 2017 домов, в каждом из которых живёт по одному человеку. Каждый из жителей площади является сторонником одной из двух политических партий: **1** или **2**. Каждый день каждый человек общается с обоими своими соседями. За ночь он обдумывает полученную от них информацию, и если оказывается, что оба его соседа являются сторонниками противоположной политической партии, к утру человек меняет свои взгляды. Верно ли, что когда-нибудь политические взгляды жителей улицы стабилизируются?

7.3 Вокруг круглой площади расположены 2018 домов, в каждом из которых живёт по одному человеку. Каждый из жителей площади является сторонником одной из двух политических партий: **1** или **2**. Каждый день каждый человек общается с обоими своими соседями. За ночь он обдумывает полученную от них информацию, и если оказывается, что оба его соседа являются сторонниками противоположной политической партии, к утру человек меняет свои взгляды. Верно ли, что когда-нибудь политические взгляды жителей улицы стабилизируются?

8. Общественное мнение. Соседи. Преобразующая схема.

Вдоль длинной улицы расположены дома (хотя бы два), в каждом из которых живёт по одному человеку. Каждый из жителей улицы является сторонником одной из двух политических партий: **1** или **2**. Каждый день каждый человек общается со всеми своими соседями (с одним соседом, если человек живёт в на краю улицы и с обоими соседями в остальных случаях). За ночь он обдумывает полученную от них информацию, и если оказывается, что двое его соседей являются сторонниками противоположной политической партии, к утру человек меняет свои взгляды.

На вход подаётся произвольная последовательность единиц и двоек, соответствующая политическим взглядам жителей улицы в какой-то из дней. Постройте схему, которая преобразует которая преобразует эту строку в строку, соответствующую политическим взглядам жителей улицы на следующий день.

Данная схема состоит из вершин (называемых состояниями) и стрелок. Каждая стрелка соединяет два состояния и символизирует переход схемы из первого состояния во второе.. Схема начинает работу в начальном состоянии **S0**. Поступающее на вход слово анализируется посимвольно. При анализе каждого символа схема переходит из текущего состояния по стрелке, над которой написан этот символ. При этом символ, написанный над стрелкой через запятую, подаётся на выход.

9. Общественное мнение. Друзья. Конструктив.

В некоторой компании у каждого человека по 3 друга. Каждый из них является сторонником одной из двух политических партий: красной или синей. Каждый день каждый человек общается со всеми своими друзьями. За ночь он обдумывает полученную от них информацию, и если оказывается, что большинство его друзей являются сторонниками противоположной политической партии, к утру человек меняет свои взгляды.

Постройте пример компании и исходного распределения политических симпатий, при котором стабилизации политических взглядов не происходит.

10. Общественное мнение. Друзья. Обоснование.

В некоторой компании у каждого человека по 3 друга. Каждый из них является сторонником одной из двух политических партий: красной или синей. Каждый день каждый человек общается со всеми своими друзьями. За ночь он обдумывает полученную от них информацию, и если оказывается, что большинство его друзей являются сторонниками противоположной политической партии, к утру человек меняет свои взгляды.

Докажите, что для любой компании существует исходное распределение политических взглядов при котором в дальнейшем стабилизации политических взглядов не происходит.

11. Возведение в степень.

Опишите алгоритм возведения числа a в 255 степень с помощью **только** операции умножения:

11.1 За 14 операций умножения без использования дополнительной памяти (то есть разрешается использовать только исходное число и результат последней операции).

11.2 За 10 операций умножения с использованием любого количества дополнительной памяти.

11.3 За 10 операций умножения с использованием одной ячейки дополнительной памяти (то есть помимо исходного числа и результата последней операции, разрешается держать в памяти ещё одно число. Это число может меняться в процессе работы алгоритма).

Замечание: верное решение для 11.3 будет засчитываться и для 11.2.