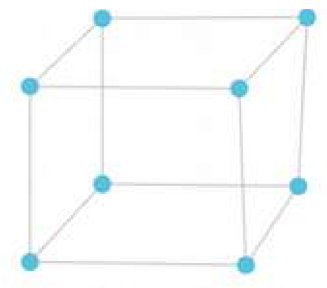
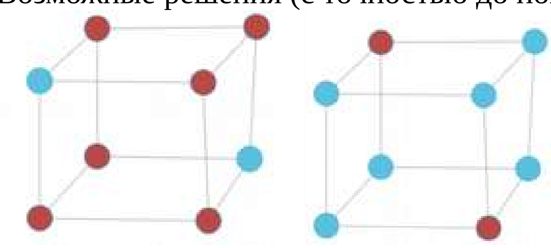
Задачи и решения заочного тура
Олимпиады ДМиТИ-2017-2018

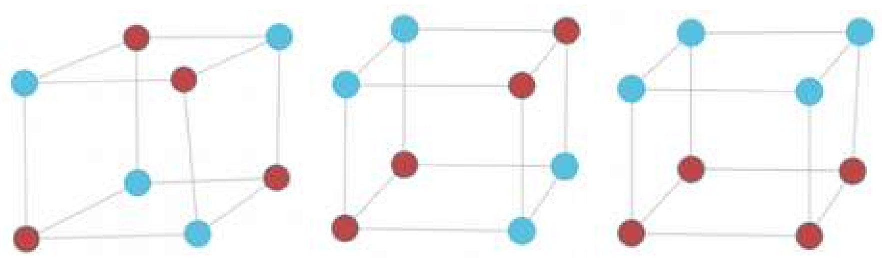
Задача 1. (1 балл).
Перед вами куб. Раскрасьте его вершины так, чтобы выполнялись следующие условия:
1) у каждой синей вершины одинаковое количество синих соседей;
2) у каждой красной вершины тоже одинаковое количество синих соседей;
3) присутствовали бы вершины обоих цветов.

Раскраски, удовлетворяющие условиям 1 и 2 называются совершенными.



Решение:
Возможные решения (с точностью до поворота и переворота):





Задача 2. (6 баллов).
Раскраски данного куба в 2 цвета, удовлетворяющие следующим условиям, называются совершенными.
1) у каждой синей вершины было одинаковое количество синих соседей;
2) у каждой красной вершины тоже было бы одинаковое количество синих соседей;

Найдите количество совершенных раскрасок куба.

Решение:
Во-первых, есть две тривиальные раскраски, в которых отсутствует один из-цветов.

Далее, у каждой синей вершины может быть ноль, один или два синих соседа (случай, когда синих соседей три, приводит нас к тривиальной раскраске). Обозначим количество синих вершин за x, красных за y, количество красных соседей у синей вершины за a, а количество синих соседей у красной вершины за b. Все эти числа для нетривиальных раскрасок больше нуля. Тогда количество рёбер, концы которых покрашены в разные цвета, можно посчитать двумя способами: с одной стороны, это xa, а с другой стороны это yb. Таким образом $xa = yb$.

Пусть x равно 5 или 7. Тогда yb — это произведение двух натуральных чисел, не превосходящих 3. Поэтому оно не может делиться на 5 или 7. Значит, эти случаи невозможны. Аналогично y не может быть равно 5 или 7, т.е. x не может быть равно 1 или 3. Значит, осталось рассмотреть три возможных значения x: 6, 4 и 2.

Пусть $x = 2$. Тогда у нас ровно две синих вершины (см. первый рисунок в решении задачи 1). Они могут находиться на одном ребре, в противоположных углах одной грани или быть противоположными вершинами куба. Легко убедиться, что только последний вариант даёт нам совершенную раскраску. Две противоположные вершины можно выбрать 4 способами, значит, раскрасок такого типа 4.

Случай $x = 6$ полностью аналогичен: вместо синих вершин достаточно рассмотреть красные. (рисунок 2).

Пусть теперь $x = 4$. Заметим, что так как $x = y = 4$, число a должно быть равно b. Число a может принимать значения 1, 2 или 3. Рассмотрим все эти варианты.

1) $a = 3$. То есть, у каждой синей вершины все соседи красные. Аналогично у каждой красной вершины все соседи синие. Это возможно только при раскраске, изображённой на рисунке 3 или при такой же раскраске, в которой цвета поменяны местами.

2) $a = 2$. То есть у каждой синей вершины ровно один синий сосед. Все остальные их 4 соседа красные, значит, оставшиеся две синие вершины находятся на ребре, противоположном соединяющему первые две синие вершины (рисунок 4). Всего у куба 6 пар рёбер, значит, раскрасок такого типа тоже 6.

3) $a = 1$. В этом случае синие вершины должны образовывать цикл из 4 вершин. Очевидно, это возможно только в том случае, когда они лежат на одной грани. 6 граней дают нам 6 раскрасок такого вида.

Итого получаем 2+4+4+2+6+6=24 раскраски.

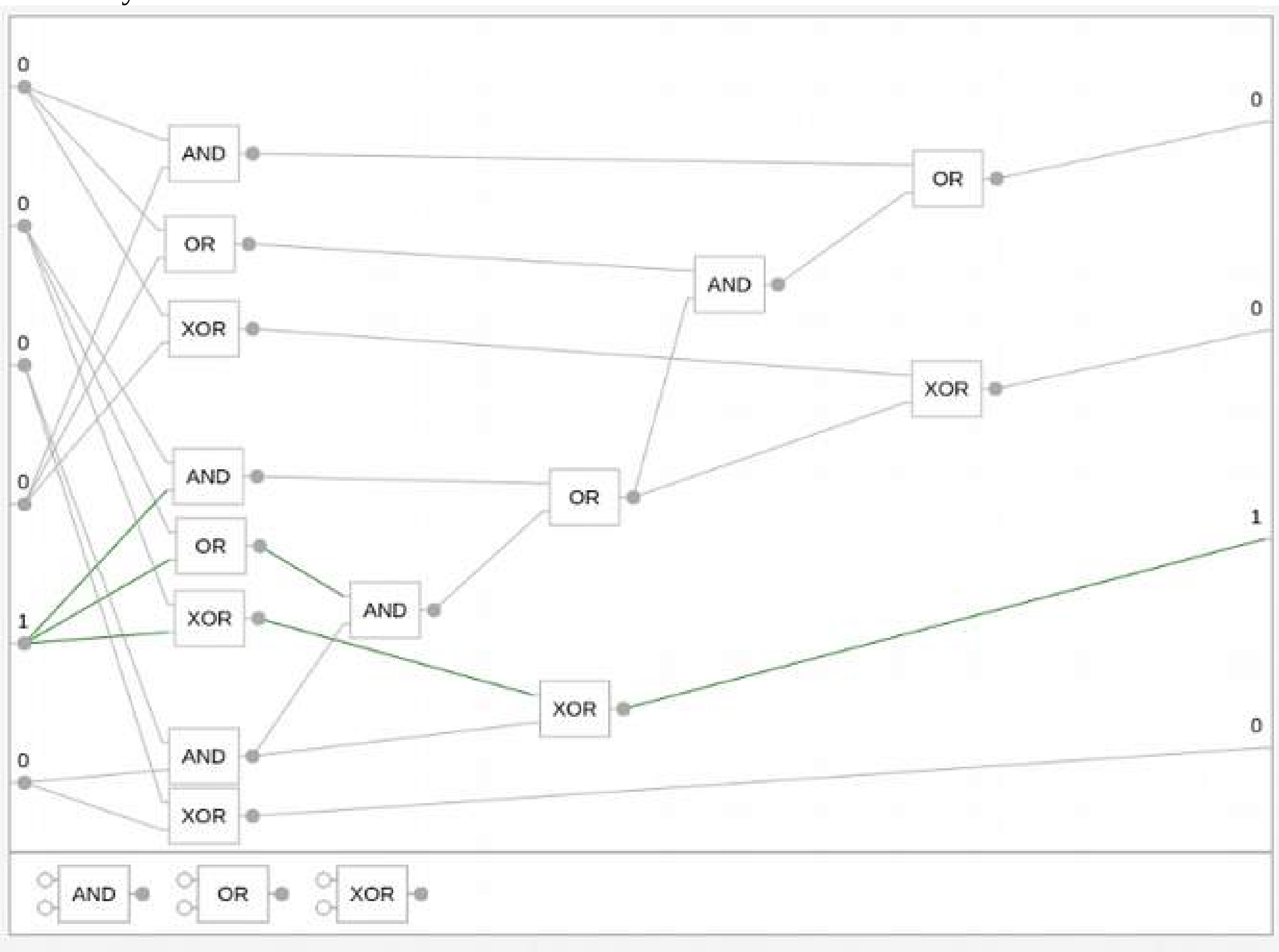
Задача 3. (5 баллов).

Из элементов AND (И), OR (ИЛИ) и XOR (ИСКЛЮЧАЮЩЕЕ ИЛИ) требуется построить логическую схему для сложения двоичных чисел. На вход подаются два трёхзначных двоичных числа. Первые три входа соответствуют первому слагаемому: верхний вход — первая цифра, нижний из трёх — последняя. Аналогично три нижних входа соответствуют второму слагаемому.

Выходы должны образовывать их сумму в двоичной системе счисления: верхний выход — первая цифра, нижний выход — последняя.

Например, когда мы получаем на вход 011101, это значит, что мы складываем 011 и 101. Получается 1000. Значит, верхний выход должен быть единицей, а остальные нулями.

Решение:
См. схему:



Поскольку XOR это и есть сложение по модулю 2, последняя цифра суммы получается как результат этой операции, применённой к последним цифрам операндов. Если же к этим цифрам применить операцию AND, мы получим перенос из последнего разряда в предпоследний.

Предпоследняя цифра — это результат суммы уже трёх слагаемых: предпоследних цифр операндов и переноса из последнего разряда. Это реализовано через два последовательных применения операции XOR.

С переносом из предпоследнего разряда в предыдущий чуть сложнее: он равен единице, когда хотя бы два из трёх слагаемых равны единице. Если эти слагаемые обозначить за x, y и z, нужный результат даёт схема ((x OR y) AND z) OR (x AND y).
Аналогично строится и остальная часть схемы.

Задача 4. (3 балла).
Опишите множество слов из букв **a** и **b**, которые можно разбить на чередующиеся блоки из букв **a** и букв **b** нечётной длины, например, **abbbaaaaab**.

Для описания используйте формулы, которые называются регулярными выражениями.

Так для повторения блока из нескольких букв используйте операцию «звездочка» (итерация), например, **(abb)*** задает множество слов **{пустое слово, abb, abbabb, abbabbabb, …}**.

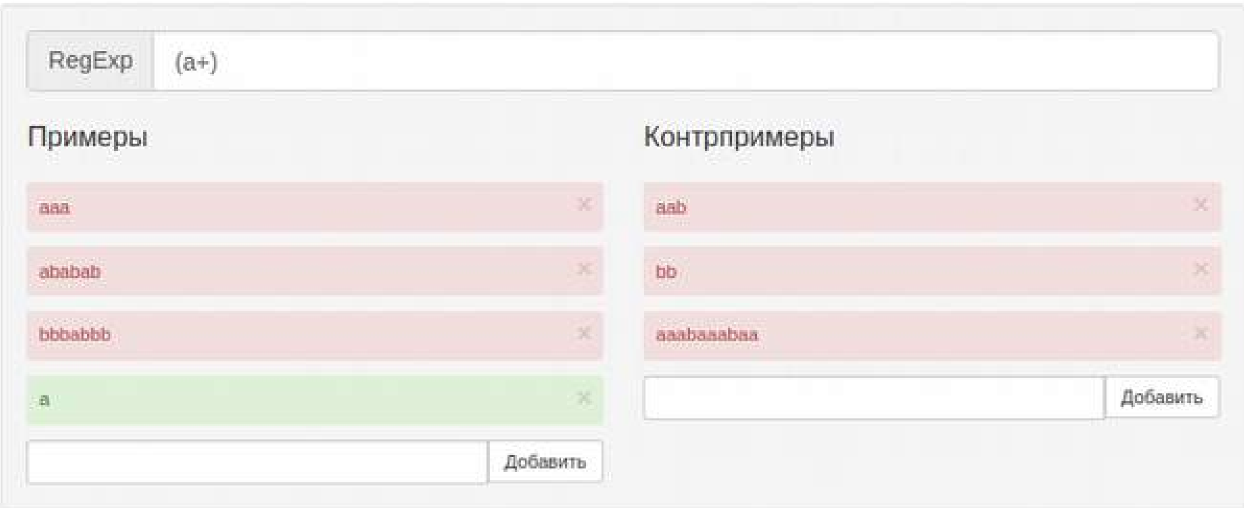
Умножение множеств (эту операцию, как обычно в алгебре, изображают точкой или вообще опускают, что мы и будем делать), описывает склейку всех слов первого множества со словами второго (третьего и т.д.), например **a*cb*** обозначает множество слов: **{c, ac, cb, acb, aac,..., aaa...acb...b, ...}**. Обратите внимание что слова, в которых нет букв **a** или **b**, получаются за счет того, что результат итерации может не содержать символов, то есть быть пустым словом.

Последней операцией, которая используется в формулах, является сложение. Сложение соответствует объединению множеств. Так обозначение **(a+b)*c+d(ac*+)** описывает множество всех последовательностей из букв **a** и **b** (обозначается **(a+b)***), к концу которых присоединена буква **c**, объединенного с множеством слов, начинающихся с буквы **d**, за которой следует буква **a**, а за ней любое число букв **c** и ещё одним однобуквенным словом (**d** умножить на пустое слово — это **d**).

Слева приведены примеры слов, которые удовлетворяют нашему условию, справа примеры слов, которые не удовлетворяют ему. Благодаря подсветке вы можете видеть, какие из этих примеров и контрпримеров удовлетворяют построенному вами выражению, а какие — нет.

Пустое слово считать разбивающимся на 0 блоков, т.е. подходящим под условие.

В качестве начального решения вы можете видеть выражение, которому удовлетворяет слово **a** и пустое слово.



Решение:

Чётное количество букв **a** задаётся выражением **(aa)***, нечётное, соответственно, **(aa)*a**. Выражение **(aa)*a(bb)*b)*** задаёт чередование блоков из букв **a** и букв **b**. Однако, пока в это выражение задаёт только те из этих слов, которые начинаются на **a**, а заканчиваются на **b**. Исправим это дописав в начало выражения **((bb)*b+)** (то есть нечетное количество букв **b** или ничего), а в конец **((aa)*a+)** (нечётное количество букв **a** или ничего).

Задача 5. (4 балла).

В задаче номер 4 мы описывали все слова в алфавите **{a, b}**, разбивающиеся на чередующиеся блоки из букв **a** и букв **b** нечётной длины.

Найдите количество таких слов длины 8.

Решение:

<u>Переборное решение:</u>

Поскольку каждый блок имеет нечётную длину, в слово длины 8 состоит из чётного числа блоков (от 2 до 8). Посчитаем количество способов разбить 8 букв на блоки, а затем умножим это количество на 2, так как каждому разбиению соответствуют два слова, одно из которых начинается на **a**, а второе на **b**.

Если блоков 8, разбиение на блоки однозначно: в каждом по одной букве.

Если блоков 6, то у нас 6 способов выбрать среди них тот, который будет иметь длину 3; остальные будут иметь длину 1.

Если блока 4, то у нас два случая: один блок имеет длину 5, остальные длину 1 (это 4 варианта) или два блока имеют длину 3, а оставшиеся два длину 1 (ещё 6 вариантов).

Наконец, если блоков 2, то всё определяется длиной первого блока, которая может принимать нечётные значения от 1 до 7 (4 варианта).

Итоговый ответ 2(1+6+10+4)=42

<u>Рекуррентное решение:</u>

Заметим, что количество слов длины n, начинающихся с **a** и с **b** совпадают. Обозначим это количество за x_n. Слово, начинающееся с буквы **a** может начинаться с **ab**, если вторая буква **b**, таких слов x_{n-1}. Если же вторая буква **a**, то и третья тоже **a**. Отделим первые две буквы, и у нас получится слово из n-2 букв, начинающееся на **a**. Таких слов x_{n-2}. Получаем рекуррентную формулу $x_n = x_{n-1} + x_{n-2}$, то есть формулу для чисел Фибоначчи. Значит, ответ — это удвоенное число Фибоначчи с соответствующим номером, т.е. 2*21=42.

Задача 6. (3 балла).

Постройте схему, распознающую все слова в алфавите **{a, b}**, разбивающиеся на чередующиеся блоки из букв **a** и букв **b** нечётной длины.

Данная схема состоит из вершин (называемых состояниями) и стрелок, символизирующих правила, по которым работает эта схема. Схема начинает работу в начальном состоянии **S0**, выделенном оранжевым. Поступающее на ход слово анализируется посимвольно. При рассмотрении каждого символа мы переходим из текущего состояния по стрелочке, над которой написан этот символ.

После того, как всё слово проанализировано, мы заканчиваем работу в одном из состояний. Некоторые состояния необходимо пометить как конечные (жирная каёмка). Это те состояния, в которых мы оказываемся, проанализировав нужные слова.

Пустое слово считать разбивающимся на 0 блоков, т.е. подходящим под условие.

Решение:
S0 — начальное состояние, соответствующее пустому слову. Оно является конечным, так как пустое слово должно распознаваться.

Состояние S1 соответствует ситуации, в которой текущее слово состоит из нечётных блоков, последний из которых состоит из букв **a**. Мы попадаем в это состояние из **S0**, поскольку слово **a** удовлетворяет этому условию. Это состояние также конечное.

Состояние **S2** соответствует ситуации, в которой текущее слово состоит из нечётных блоков, последний из которых состоит из букв **b**. Мы попадаем в это состояние из **S0**, поскольку слово **b** удовлетворяет этому условию. И это состояние конечное.

Состояние **S3** соответствует ситуации, в которой все блоки, на которые разбивается текущее слово, кроме последнего, нечётные, а последний чётный и состоит из букв **a**. Считывая ещё одну букву **a**, мы переходим туда и обратно между этим состоянием и состоянием **S1**. Это состояние, естественно не конечное.

Аналогично состояние **S4** соответствует ситуации, в которой все блоки, на которые разбивается текущее слово, кроме последнего, нечётные, а последний чётный и состоит из букв **b**.

Наконец в состояние **S5** мы попадаем из состояний **S3** и **S4** получив «неправильный» символ. Это состояние также не конечное и соответствует ситуации, в которой наше слово неправильное, и исправить его, добавляя новые символы в конец слова, нельзя.

Распознающую схему вы можете увидеть на рисунке:

Задача 7. (3 балла).

Постройте машину Тьюринга, которая умножает записанное на ленте число в четверичной системе на 3.

Решение:
Поскольку умножать мы начинаем с последней цифры, сначала надо перевести считывающую головку в конец числа. Для этого служат первые четыре команды нашей машины.

Затем мы начинаем собственно умножение. Нам понадобятся всего три состояния, соответствующие переносам из разряда в разряд: **q0** соответствует переносу 0 (0 «в уме»), **q1** соответствует переносу 1, **q2** соответствует переносу 2.

Рассмотрим какую-нибудь команду из эталонного решения, например **q1[3]->q2[2]L**. Каким арифметическим операциям она соответствует? Мы считываем символ 3 и умножаем его на 3, получаем четверичное число 21. Добавляем единицу, которая была «в уме» (состояние **q1**) и получаем 22. Это число как раз и соответствует правой части команды. По такому же принципу строятся и остальные команды.

Задача 8. (4 балла).

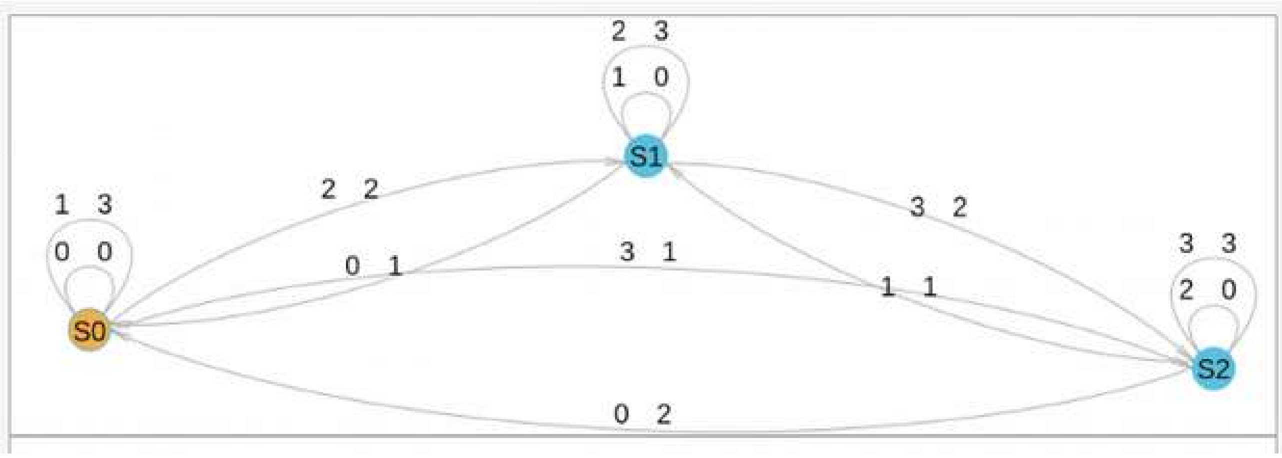
Постройте схему, выполняющую умножение вводимого числа в четверичной системе на 3.

Данная схема состоит из вершин (называемых состояниями) и стрелок, символизирующих правила, по которым работает эта схема. Схема начинает работу в начальном состоянии **S0**, выделенном оранжевым. Поступающее на ход число анализируется посимвольно. При рассмотрении каждого символа мы переходим из текущего состояния по стрелочке, над которой написан этот символ.

В данной задаче мы записываем число от последней цифры к первой. Если количество цифр в произведении больше количества цифр в множителе, для правильной работы автомата к множителю спереди нужно добавить 0 (т.е. добавить 0 в конце вводимой строки).

Например, для строки 123 автомат выдаст строку 322, а для строки 1230 (соответствующей тому же самому четверичному числу 321) выдаст результат 3222 (соответствующий числу 2223).

Решение:
Нам понадобятся всего три состояния, соответствующие переносам из разряда в разряд: **S0** соответствует переносу 0 (0 «в уме»), **S1** соответствует переносу 1, **S2** соответствует переносу 2.



Рассмотрим какую-нибудь стрелочку из эталонного решения, например **S1[3]->S2[1]**. Каким арифметическим операциям она соответствует? Мы считываем символ 3 и умножаем его на 3, получаем четверичное число 21. Добавляем единицу, которая была «в уме» (состояние **S1**) и получаем 22. Это число как раз и соответствует правой части команды. По такому же принципу строятся и остальные команды.

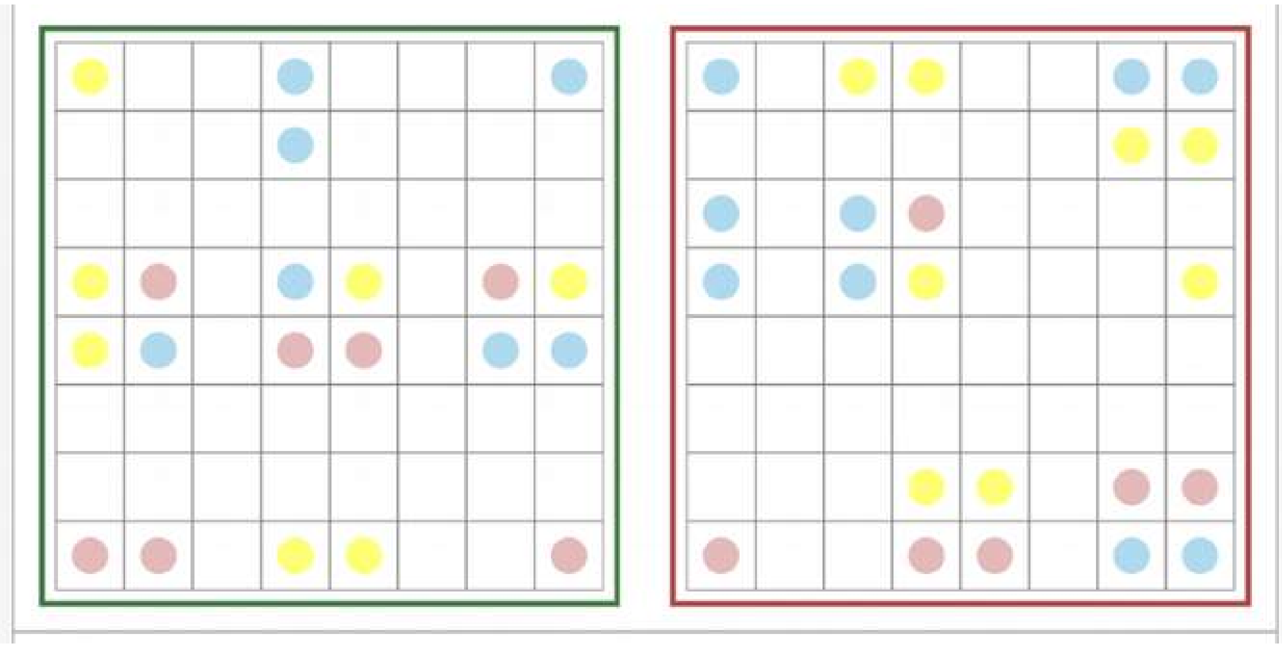
Задача 9. (4 балла).

Напишите логическую формулу, описывающую свойство, которым обладает комбинация фишек на левой картинке, но не обладает комбинация на правой. Постарайтесь, чтобы описание было как можно короче.

В формуле используются следующие обозначения:

Фишки обозначаются переменными *x*, *y*, *z*. Простые свойства описываются такими выражениями как «*x* синий», «*y* красный», «z желтый», «*x* сосед *y*» (последнее означает, что фишки стоят на различных клетках, у которых есть общая сторона или угол). Для записи более сложных свойств используются логические связки, которые соединяют простые свойства:

И, ИЛИ, НЕ ВЕРНО ЧТО, СЛЕДОВАТЕЛЬНО, ТОГДА И ТОЛЬКО ТОГДА, ДЛЯ ВСЕХ *x*, СУЩЕСТВУЕТ *x* ТАКОЙ, ЧТО (вместо *x* можно использовать *y* или *z*).
Для упорядочения связок используются круглые скобки. В качестве начального решения введена формула, которая не верна для обоих картинок.



Решение:

Например, такая формула:

ДЛЯ ВСЕХ x ДЛЯ ВСЕХ y ((x синий И y красный И x сосед y) СЛЕДОВАТЕЛЬНО СУЩЕСТВУЕТ z ТАКОЙ, ЧТО (z жёлтый И x сосед z И y сосед z))

Задача 10. (3 балла).
Операция умножения требует существенно больше элементарных операций чем операция сложения (или вычитания), поэтому для повышения эффективности алгоритмов применяют алгебраические приемы, которые за счет увеличения числа операций сложения и вычитания используют меньше операций умножения.

Выражение $a^3 + b^3 - c^3$ легко можно вычислить используя 6 операций умножения: для возведения каждого числа в куб требуется две операции. Придумайте алгоритм вычисления этой суммы за меньшее число операций умножения. Чем меньше операций, тем выше будет оценка за задачу.

Решение:
Можно увидеть, что $a^3 + b^3 - c^3 = (a + b - c)^3 - 3(a+b)(a-c)(b-c)$. Таким образом нам требуется 4 операции: 2 для возведения в куб и две для вычисления $(a+b)(a-c)(b-c)$. Для умножения на 3 операция умножения не нужна: она заменяется двумя сложениями.