Разбор задач ДМиТИ 2015

Задача 1. Графы. Для решения задач на графы важно уметь замечать и формулировать различные свойства графов. Так, например, если степень каждой вершины графа k, то, умножив, число вершин В на k, мы получим число, вдвое большее числа рёбер Р, так как каждое ребро будет подсчитано дважды: kВ=2Р. Уже из этой формулы видно, что не существует регулярных графов с нечётным числом вершин и нечётной степенью вершин.
Другая важная закономерность — формула Эйлера — выполняется для плоских графов. Так если нарисовать граф в форме квадрата, у нас будет 4 вершины, 4 ребра и 2 части, на которые разделена плоскость (эти части будем называть гранями по аналогии с многогранниками, изображение которых на плоскости и будут описывать такие графы): В=4, Р=4, Г=2.
Очевидно, что между этими характеристиками есть зависимость. Какая? Если мы проведем в квадрате диагональ, то число вершин графа не изменится, а число рёбер и число граней увеличится на 1. Если же соединить ребром вершину квадрата с его центром, то не изменится количество граней, а число вершин и рёбер увеличится на 1. Таким образом, можно заметить, что сумма В+Г и Р увеличиваются одинаково при добавлении новых вершин и рёбер, а значит В+Г-Р должно быть константой. Из нашего примера видно, что это константа 2.
Формула Эйлера: В+Г-Р=2.
Используя эти соображения, можно ответить на вопросы задачи:
подставив в формулу Эйлера первую формулу, получим
2В+2Г-kВ=4 => 2Г=4+(k-2)В.
Заметим, что каждая грань может быть ограничено не менее чем 3 рёбрами, поэтому 3Г≤2Р, так как, суммируя рёбра по граням, каждое ребро будет подсчитано дважды.
Вернемся к выведенной формуле и используем полученное неравенство:
12+3(k-2)В≤4Р => 12+3(k-2)В≤2kВ =>12≤(2k-3k+6) => 12≤(6-k)В
Это неравенство не может выполняться при k≥6, то есть f(n)<6 (этой оценки достаточно для ответа на второй вопрос задачи).
Поэтому, максимальная степень вершины связного регулярного планарного графа всегда меньше 6. Очевидно, что граф со степенью вершин 2 можно построить для любого *n*.
Нетрудно придумать алгоритм для построения регулярных графов степени 3 с чётным числом вершин (напоминаем, что нечётным число вершин в этом случае быть не может). Для этого надо соединить две противоположные вершины правильного 2k-угольника, после чего остальные вершины распадутся на пары вершин, «симметричных» относительно оси, определяемой выбранной парой. Их также нужно соединить рёбрами. Так же легко придумать способ построения регулярных графов степени 4 с чётным числом вершин.
Следующий приём показывает, как можно увеличить число вершин графа на 1.
Этот приём работает, начиная с *n*=9. В этом случае среди граней обязательно найдётся 4-угольник. Ставим внутрь него новую вершину и соединяем её с вершинами четырёхугольника, после чего две противоположные стороны четырёхугольника убираем. (рис. 1)

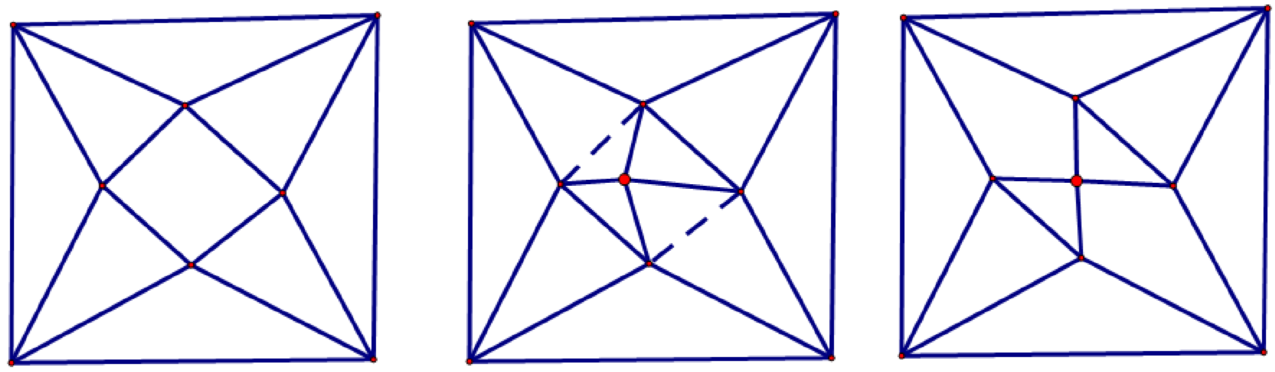


Рис. 1

Заметим, что при $n=7$ минимальная степень вершины равна 2. Покажем, что k=4 невозможно от противного. Иначе получается, что рёбер 4*7/2=14, тогда граней Г=Р-В+2=14-7+2=9. На каждую грань придётся по 28/9 рёбер, то есть одна грань должна быть четырёхугольником. Изобразим граф так, чтобы этот четырёхугольник был внешним для всех треугольников. Тогда внутри него будут три вершины. Они должны быть соединены 8 рёбрами с внешними 4 вершинами. Небольшие рассуждения с перебором комбинаций показывают, что такое невозможно (рис. 2).

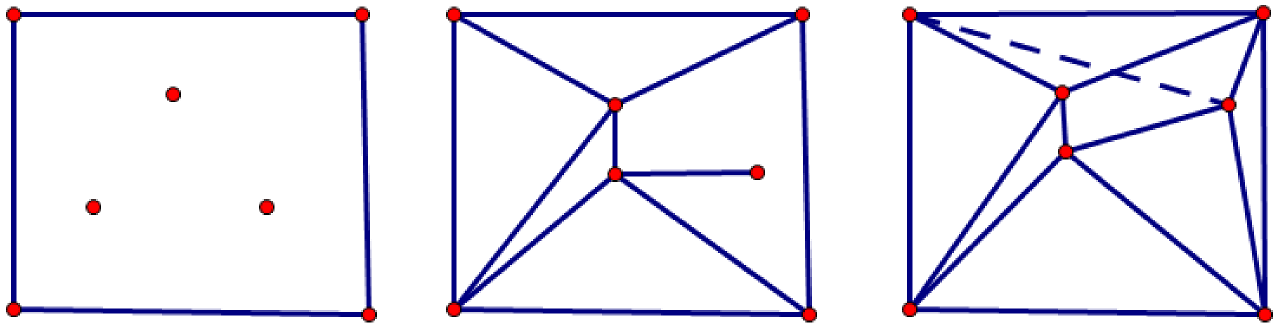


Рис. 2

Остаётся открытым вопрос с 5 вершинами. Это более сложная задача, выходящая за рамки олимпиады. Покажем несколько регулярных графов этого типа:

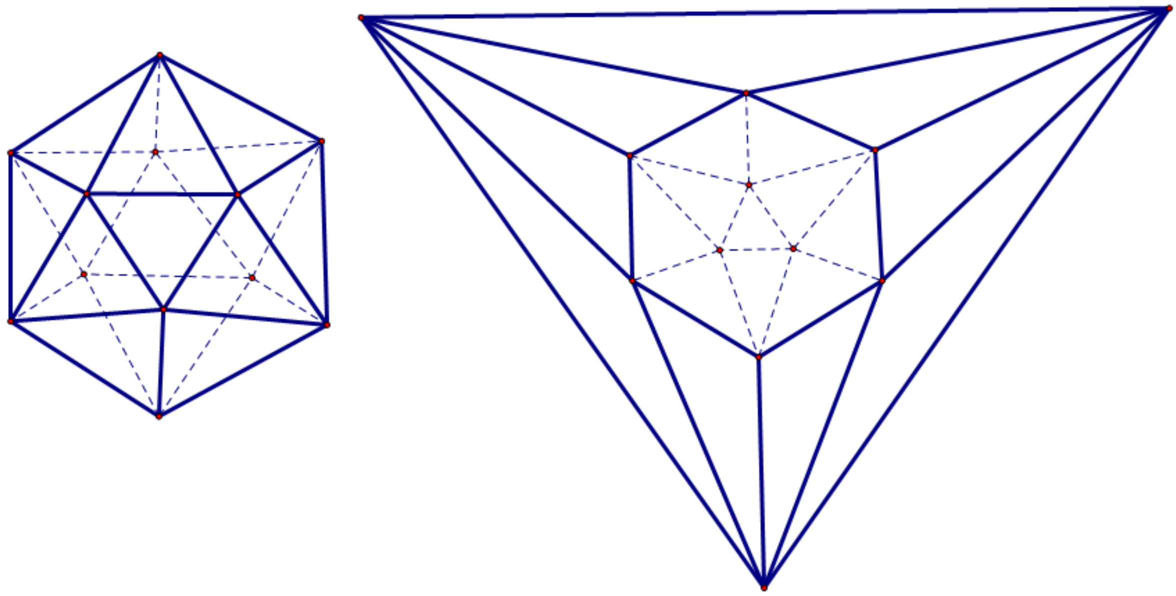


Рис. 3. Граф икосаэдра (справа плоский вариант расположения вершин)

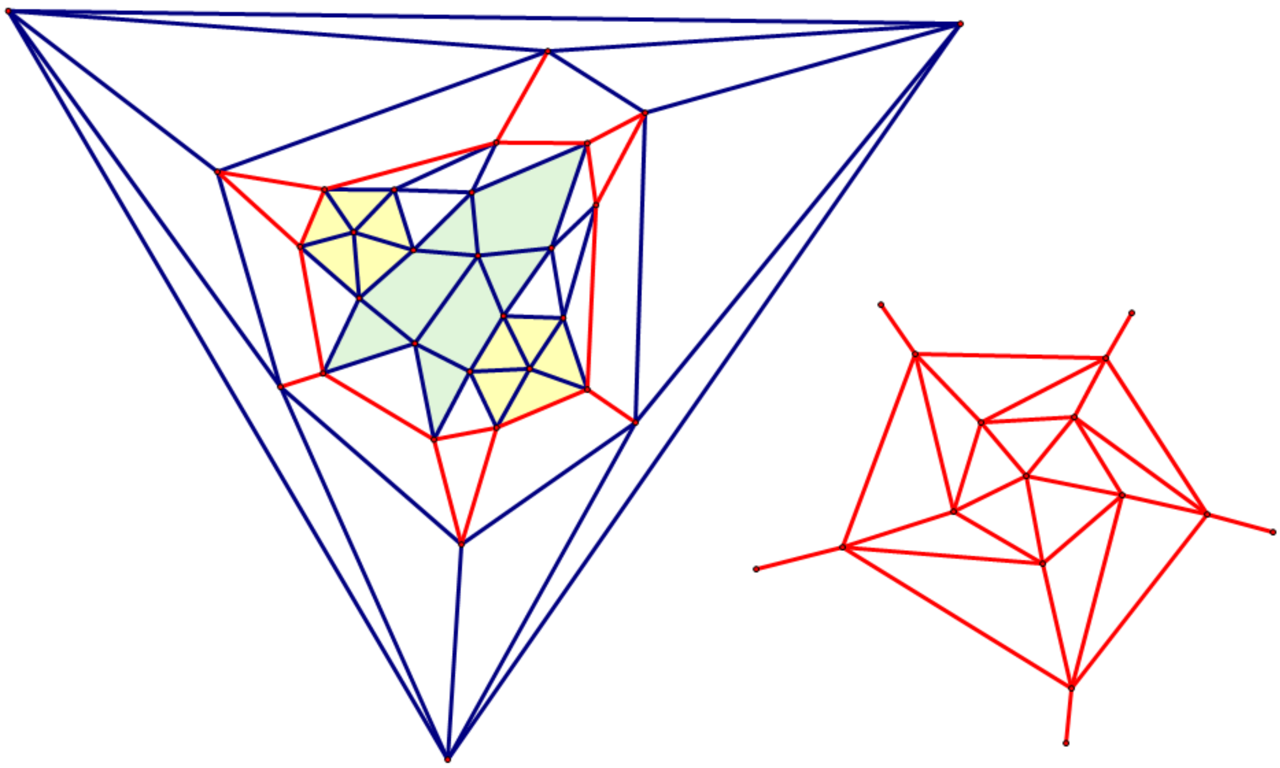


Рис. 4. «Наращивание» вершин в графе икосаэдра «заменой пятиугольника» (1-ый шаг нетривиальный показан слева, далее с помощью подстановки, показанной справа)

Задача 2. Комбинаторика.

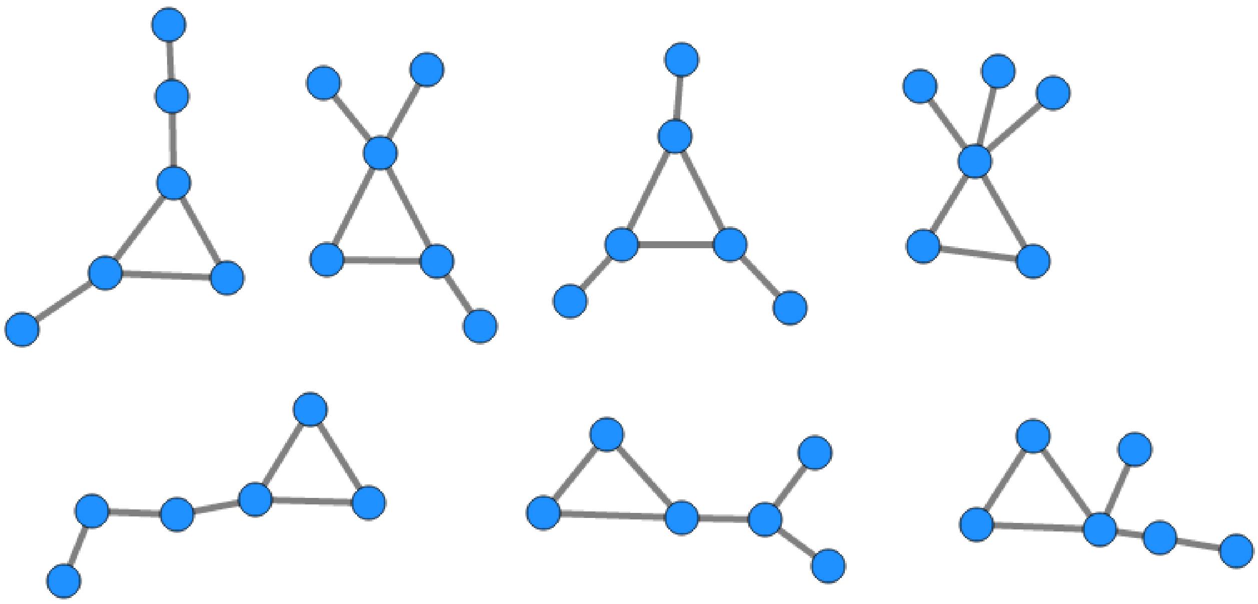


Рис. 5

Во второй части задачи это решение обобщается. Цикл содержит n-3 вершины и 3 вершины нужно подсоединить к циклу рёбрами.
Если они соединяются с одной вершиной, то вариантов 4 (все показаны выше).
Если они соединяются с двумя вершинами, то можно зафиксировать вершину, к которой прикрепляется 1 ребро и перечислить способы выбора вершины, к которой присоединяются 2 ребра. Таких вариантов [(n-3)/2], где квадратные скобки обозначают целую часть. Это число умножается на 2, так как есть два варианта подсоединения двух рёбер к одной вершине.
Самым трудным является подсчёт вариантов прикрепления трёх отрезков к трём разным вершинам. Задача сводится к разбиению числа n-3 на три слагаемых без учёта порядка. Например, если n=9, то варианты будут такие: 6=4+1+1=3+2+1=2+2+2. Соответствующие решения изображены на рисунке

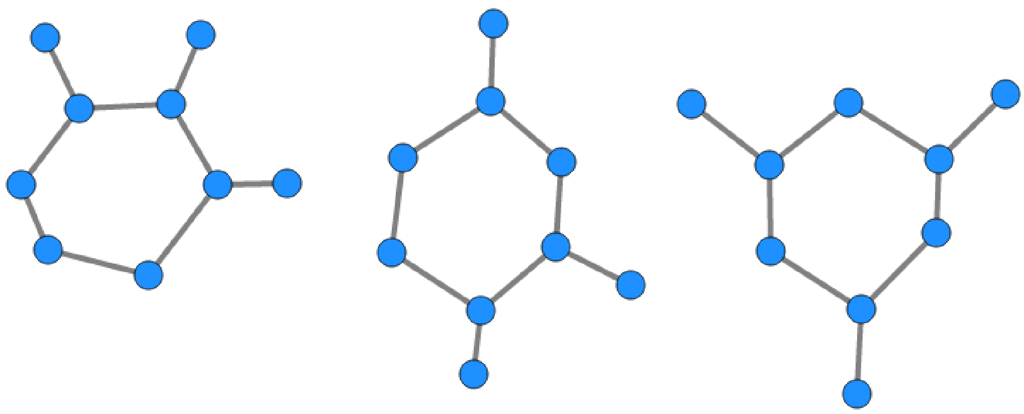


Рис. 6

Как оценить число разбиений? Для их подсчёта можно вывести рекуррентную формулу. Любое разбиение либо содержит 1, либо нет. Число разбиений с 1 будет равно разбиению оставшейся части на два слагаемых. Если же все слагаемые больше 1, то каждое можно уменьшить на 1, поэтому число таких разбиений будет равно числу разбиений числа уменьшенного на 3 на три слагаемых. Получаем такую формулу:

$$p(k;3)=p(k-1;2)+p(k-3;3)$$

Продолжим процесс разбиения второго слагаемого по той же формуле:

$$p(k;3)=p(k-1;2)+p(k-3;3)=p(k-1;2)+p(k-4;2)+p(k-6;3)$$

Как уже замечено выше число разбиений числа m на два слагаемых равно [m/2], поэтому

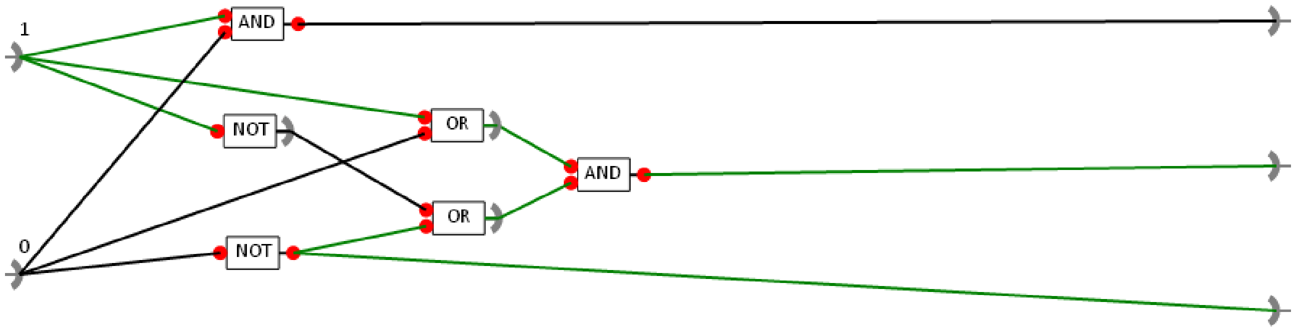
$$p(n-3;3)=[(n-4)/2]+[(n-7)/2]+....$$

что нетрудно оценить сверху и снизу арифметическими последовательностями.

3. Регулярные выражения

Для простоты ограничимся одним знаком операции +, затем в получившимся регулярном выражении достаточно будет заменить его на (+|*). Тогда выражение (2+)^2 описывает все цепочки без скобок, выражение [(2+)^2] цепочку произвольной длины в квадратных скобках, но при этом можем получить цепочку [2], которая считается неправильное, поэтому добавим внутрь скобок одно слагаемое: [(2+)^2+2]. Комбинируя эти два выражения получим решение: ((2|[(2+)^2+2])+)^(2|[(2+)^2+2]).
Ответ: ((2|[(2(+|*))^2(+|*)2])(+|*))^(2|[(2(+|*))^2(+|*)2])
Ответить на второй вопрос не сложно. Вот основные типы цепочек из 11 символов: 2+2+2+2+2+2 (нет квадратных скобок), [2+2+2+2+2], 2+[2+2+2+2], …, (одна пара квадратных скобок), [2+2]+[2+2] (две пары квадратных скобок). Таким образом нужно подсчитать только число вариантов поставить одну пару скобок в выражение с пятью слагаемыми, для этого нужно выбрать две двойки — первую и последнюю, которые являются началом и концом записи в скобках. Это можно сделать C(5;2)=5*4/2=10 способами. Если учесть то, что каждый плюс может быть заменён умножением, получается 2^5+10*2^4+2^3=32+160+8=200 способов.

4. Логические схемы



Переход к общему случаю: Пусть a(n)a(n-1).....a(0) + 1 = b(n+1)b(n)....b(0)
p(0)=1;
b(k)=(НЕ a(k) ИЛИ НЕ p(k)) И (a(k) ИЛИ p(k)); p(k+1)=a(k) И p(k)
Для такой конструкции легко посчитать число элементов (n-1)*6, так как построенный блок будет повторен в схеме n-1 раз.

5. Мир Тарского

Условие можно описать тремя утверждениями (которые считаются соединёнными между собой союзом И):

1) ∀x ∀y (НЕ ВЕРНО ЧТО x ВЫШЕ y)
2) ∀x (x КРАСНЫЙ => ∃y (x РЯДОМ С y И y ЛЕВЕЕ x) И
∃z (x РЯДОМ С z И x ЛЕВЕЕ z))
3) ∀x (x СИНИЙ =>НЕ ВЕРНО ЧТО (∃y y ЛЕВЕЕ x И ∃z x ЛЕВЕЕ z))

Утверждение 1 описывает условие о том, что все фигуры стоят в одном ряду.
Утверждение 2 описывает условие о том, что красные фигуры стоят внутри ряда.
Утверждение 3 описывает условие о том, что синие фигуры стоят по краям и только.

Если соединить перечисленные выше утверждения в одно, соединив союзом И, то квантор всеобщности, связывающий x, можно «вынести» перед всем выражением. Это уменьшит число кванторов с 8 до 6.
Обоснование формулы ∀x (P(x) И Q(x)) = ∀P(x) И ∀Q(x):
Если верно утверждение слева то для любого x будут верны и P(x) и Q(x).
Если же верна правая часть, то верно каждое из ∀P(x), ∀Q(x). Что означает истинность и P(x) и Q(x) для любого x.

6. Машина Тьюринга

Для решения используем идею: A^2-B^2=(A+B)(A-B)
План решения:
1) скопировать числа A и B для того, чтобы с одной парой сделать умножение, с другой - сложение
2) сложить числа A и B (для пары, стоящей левее)
3) вычесть из числа A число B (для пары, стоящей правее)
4) перемножить получившиеся числа

s0 [1] -> s0 [1] R

s0 [*] -> q1 [0] L
q1 [1] -> q1 [1] L
q1 [*] -> q2 [*] R
замена * на 0 и возврат на начало - подготовка к применению машины копирования МТ1
далее включаем команды машины МТ1, в которой состояние s0 заменено на q2, а конечное f - на q3
(вообще говоря, команды МТ1 можно писать в любом месте, так как команды машины Тьюринга выполняются не подряд, а выбирается та команда, левая часть которой соответствует текущему состоянию и читаемому символу на ленте)
q3 [1] -> q4 [*] R
q4 [1] -> q4 [1] R
q4 [0] -> q5 [1] R
складываем числа, удаляя первое и заменяя разделяющий 0 на 1, то есть просто соединяем единицы одного слагаемого с единицами другого
q5 [1] -> q5 [1] R
q5 [*] -> q6 [*] R
q6 [1] -> q6 [1] R
q6 [0] -> q7 [*] L
q7 [1] -> q7 [1] L
q7 [*] -> q8 [*] R
готовим вторую пару чисел к вычитанию, для этого заменяем 0 на * и переводим головку машины в нужное место
далее включаем команды машины МТ2, в которой состояние s0 заменено на q8, а конечное f - на q9
q9 [1] -> q9 [1] L
q9 [*] -> q10 [*] L
q10 [1] -> q10 [1] L
q10 [*] -> q11 [*] R
готовим результат к перемножению, переводя головку в нужное место
далее включаем команды машины МТ3, в которой состояние s0 заменено на q11.

Подсчитаем число используемых ячеек для чисел длины n и m.
После копирования будет занято 2(n+m+1) ячеек. При вычитании и сложении это число не увеличится. Увеличится оно только при умножении, так как одно из чисел будет скопировано столько раз, сколько единиц в другом, то есть общее число используемых ячеек будет: (n-m)(n+m)+(n+m) (в заданных машинах Тьюринга первое число используется как счётчик, поэтому к месту, которое оно занимает добавятся места, которые займёт результат).